绝密★启用前

2020-2021学年全国I卷区优生联赛试卷

文 科 数 学

注意事项：

1．答题前，先将自己的姓名、准考证号填写在试题卷和答题卡上，并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。

2．选择题的作答：每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

3．非选择题的作答：用签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试题卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。

4．考试结束后，请将本试题卷和答题卡一并上交。

第I卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．已知 a，$b\in R$，若$\left\{a,\ \frac{b}{a},\ 1\right\}=\{a^2,\ a+b,\ 0\}$，则 $a^{2021}+b^{2021}$的值为（　　）

A．-1　　B．0　　C．1　　D．-1或0

2．已知 m 为实数，当 m 变化时，$z=(m-3)+(m+1)i$ 在复平面内对应的点不可能在（　　）

A．第一象限　　B．第二象限　　C．第三象限　　D．第四象限

3．某工厂生产甲、乙、丙三种产品的数量刚好构成一个公比为$q(q\neq 1)$的等比数列，现从全体产品中按分层抽样的方法抽取一个样本容量为 140 的样本进行调查，其中丙产品的数量为 20，则抽取的甲产品的数量为（　　）

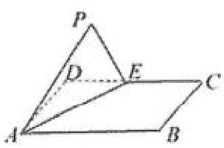
A．10　　B．20　　C．40　　D．80

4．如图，在矩形 $ABCD$ 中，点 E 为线段 CD 上一动点(不包括端点)，将$\triangle ADE$ 沿 AE 翻折成$\triangle PAE$，使得平面 $PAE\perp$平面 $ABCE$．给出下列两个结论：

①在平面 $ABCE$ 内过点 C 有且只有一条直线与平面 PAE 平行；

②在线段 CD 上存在点 E 使得 $PE\perp AB$．

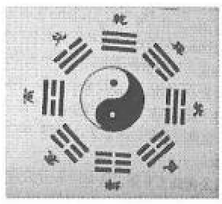
则下列判断正确的是（　　）



A．①正确，②错误　　B．①错误，②正确

C．①，②都正确　　D．①，②都错误

5．宋代著名类书《太平御览》记载：“伏羲坐于方坛之上，听八风之气，乃画八卦．”乾为天，坤为地，震为雷，坎为水，艮为山，巽为风，离为火，兑为泽，象征八种自然现象，以类万物之情．如图所示为太极八卦图，八卦分据八方，中绘太极，古代常用此图作为除凶避灾的吉祥图案．八卦中的每一卦均由纵向排列的三个爻组成，其中“⚊”为阳爻，“⚋”为阴爻．现从八卦中任取两卦，则取出的两卦中有一卦恰有一个阳爻，另一卦恰有两个阳爻的概率为（　　）



A. $\frac{3}{14}$　　B. $\frac{3}{28}$　　C. $\frac{9}{28}$　　D. $\frac{3}{7}$

6. 函数 $f(x)=e^{x-2}-e^{2-x}$ 的图象关于（　　）

A. 点(−2，0)对称　B. 直线 $x=-2$ 对称　C. 点(2，0)对称　D. 直线 $x=2$ 对称

7. 直线 l 经过椭圆 C 的一个顶点和一个焦点，若椭圆 C 中心到 l 的距离为其短轴长的$\frac{1}{4}$，则下列方程中可能是椭圆 C 的方程的为（　　）

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{15}=1$　　B. $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$　　C. $\frac{x^2}{2}+y^2=1$　　D. $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{8}=1$

8. 设 ΔABC 的内角 A,B,C 所对的边为 a,b,c，则下列条件能确定 ΔABC 是等腰三角形是（　　）

A. $a\cos A=b\cos B$　　B. $a=c\cos B$　　C. $a\cos B=b\cos A$　　D. $\frac{\tan A}{\tan B}=\frac{a^2}{b^2}$

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 是首项为 a 的等比数列，且 $a>0$，a_1+1，a_2+2，a_3+3 也构成等比数列.若数列 $\{a_n\}$ 唯一，则满足条件的实数 a 的个数为（　　）

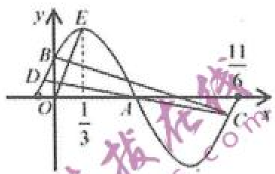
A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 无数个

10. 已知函数 $f(x)=\ln(e^x+1)$，设 A，B 为函数 $y=f(x)$的图象上不同两点，直线 AB 的斜率 k，则 k 与 1 的大小关系是（　　）

A. $k>1$　　B. $k<1$

C. 有可能 $k=1$　　D. k 与 1 的大小关系不确定

11. 如图，函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,\ 0<\varphi<\frac{\pi}{2})$在一个周期内的图象(不包括端点)与 x 轴，y 轴的交点分别为 A，B，与过点 A 的直线另相交于 C，D 两点，E 为图象的最高点，O 为坐标原点，则 $(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{OE}=$（　　）



A. $-\frac{4}{9}$　　B. $\frac{23}{9}$

C. $-\frac{13}{18}$　　D. $\frac{23}{18}$

12. 已知点 $P(2，2)$，若圆 $C:(x-5)^2+(y-6)^2=r^2(r>0)$ 上存在两点 A，B，使得 $\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{AB}$，则 r 的取值范围是（　　）

A. (0，5)　　B. (0，$\frac{5}{2}$)　　C. [1，5)　　D. $[\sqrt{5},\frac{5}{2})$

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 满足$|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$，$(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，则向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为______. (用弧度制表示)

14. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左焦点为 F_1，过 F_1 的直线与双曲线的渐近线交于 A、B 两点，以 AB 为直径的圆过坐标原点，则双曲线的离心率为______.

15. 已知实数 x,y 满足 $x^2+2xy-1=0$，则 x^2+y^2 的最小值为______.

16. 已知点 M 为棱长是 2 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的内切球 O 的球面上的动点，点 N 为 B_1C_1 的中点，若满足 $CM \perp BN$，则动点 M 的轨迹的长度为________.

三、解答题：本大题共 6 大题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（一）必考题：共 60 分.

17. （12 分）在△ABC 中，$\sin B-\sin C=\sin(A-C)$.

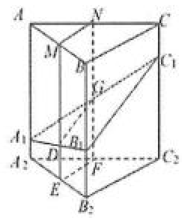
（1）求角 A；

（2）若 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{2}, |\overrightarrow{BC}|=2$，求 ΔABC 的面积.

18. （12 分）如图，已知直三棱柱 $ABC-A_2B_2C_2$ 的底面为正三角形，侧棱长都为 4，A_1、B_1、C_1 分别在棱 AA_2、BB_2、CC_2 上，且 $A_1A_2=1$，$B_1B_2=2$，$C_1C_2=3$，过 AB，AC 的中点 M，N 且与直线 AA_2 平行的平面截多面体 $A_1B_1C_1$-$A_2B_2C_2$ 所得的截面 $DEFG$ 为该多面体的一个中截面.

（1）证明：中截面 $DEFG$ 是梯形；

（2）若直线 A_1C_1 与平面 $A_2B_2C_2$ 所成的角为 45°，求多面体 $A_1B_1C_1$-$A_2B_2C_2$ 的体积.



19. （12 分）今年五月，某医院健康管理中心为了调查成年人体内某种自身免疫力指标，从在本院体检的成年人群中随机抽取了 100 人，按其免疫力指标分成如下五组：(10，20]，(20，30]，(30，40]，(40，50]，(50，60]，其频率分布直方图如图 1 所示．今年十月，某医药研究所研发了一种疫苗，对提高该免疫力有显著效果．经临床检测，将自身免疫力指标比较低的成年人分为五组，各组分别按不同剂量注射疫苗后，其免疫力指标 y 与疫苗注射量 x 个单位具有相关关系，样本数据的散点图如图 2 所示.

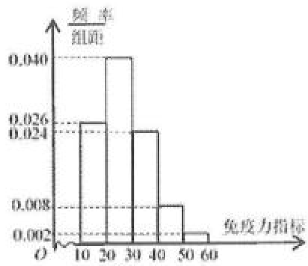


图 1

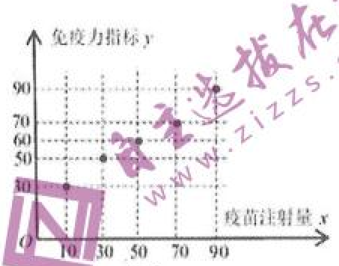


图 2

（1）设今年五月该医院健康管理中心共接待 6000 名成年人体检，试估计这些体检人群中免疫力指标不低于 30 的人数，并说明理由；

（2）由于大剂量注射疫苗会对身体产生一定的副作用，医学部门设定：自身免疫力指标较低的成年人注射疫苗后，其免疫力指标不应超过普通成年人群自身免疫力指标平均值的 3 倍．以健管中心抽取的 100 人作为普通人群的样本，据此估计，疫苗注射量不应超过多少个单位？

附：对于一组样本数据 (x_1, y_1)，(x_2, y_2)，…，(x_n, y_n)，其回归直线 $\hat{y}=bx+a$ 的斜率和截距的最小二乘估计值分别为 $b=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{xy}}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2}$，$a=\bar{y}-b\bar{x}$.

20. （12 分）已知动圆 Q 过定点 $T(2,0)$，且与 y 轴截得的弦 MN 长为 4，设动圆圆心 Q 的轨迹为 C.

（1）求轨迹 C 的方程；

（2）设 $P(1,2)$，过 $F(1,0)$作不与 x 轴垂直的直线 l 交轨迹 C 于 A，B 两点，直线 PA，PB 分别与直线 $x=-1$ 相交于 D，E 两点，以线段 DE 为直径的圆为 G，判断点 F 与圆 G 的位置关系，并说明理由.

21. （12 分）已知函数 $f(x)=x\ln x-\frac{a}{2}(x^2-1)$.

（1）若 $f(x)$在$(0,+\infty)$内是减函数，求 a 的取值范围；

（2）若 $a<0$，证明：$f(x)$有且仅有一个零点.

请考生在 22、23 两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分.

（二）选考题：共 10 分.

22. （10 分）【选修 4-4：坐标系与参数方程】

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为$\begin{cases} x=\tan\alpha \\ y=\dfrac{\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})}{\cos\alpha} \end{cases}$（$\alpha$ 为参数，且 $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$）.

以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2=\frac{4}{2-\cos^2\theta}$.

（1）求曲线 C_1 的普通方程和曲线 C_2 的直角坐标方程；

（2）设曲线 C_1 与 C_2 相交于 A，B 两点，点 P 的直角坐标为$(0,1)$，求$|PA|\cdot|PB|$的值.

23. （10 分）【选修 4-5：不等式选讲】

已知函数 $f(x)=|x-a|+2|x+3|$.

（1）当 $a=1$ 时，求不等式 $f(x)<8$ 的解集；

（2）若对任意 $x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geq 2a+1$ 恒成立，求实数 a 的取值范围.

2020-2021 学年全国 I 卷区优生联赛试卷

文 科 数 学 答 案

第 I 卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．【答案】A

【解析】由已知得 $a\neq0$，则 $\frac{b}{a}=0$，$\therefore b=0$，于是 $a^2=1$，解得 $a=1$ 或 $a=-1$.

根据集合中元素的互异性可知 $a=1$ 应舍去，因此 $a=-1$，故 $a^{2021}+b^{2021}=(-1)^{2021}+0^{2021}=-1$.

2．【答案】D

【解析】设 $z=x+yi(x,\ y\in R)$，

又 $z=(m-3)+(m+1)i$，所以 $x=m-3$，$y=m+1$，得 $y=x+4$，

$\therefore$ 复数 z 在复平面内对应的点在直线 $y=x+4$ 上．

又直线 $y=x+4$ 不经过第四象限，所以复数 z 对应的点不可能在第四象限．

3．【答案】D

【解析】由题意甲、乙、丙三种产品的数量，不妨设其样本数量分别是 a_1,a_1q,a_1q^2，

其中 $a_1>0,q>0$ 且 $q\neq1$，

根据已知 $\frac{20}{140}=\frac{a_1q^2}{a_1+a_1q+a_1q^2}=\frac{q^2}{1+q+q^2}$，解得 $q=\frac{1}{2}$（$q=-\frac{1}{3}$ 舍去），

所以样本中甲产品的比例为 $\frac{4}{7}$，故甲产品的数量为 80，选 D.

4．【答案】A

【解析】①在 AB 上取点 F，使 $AF=EC$，则四边形 $AECF$ 为平行四边形，得 $CF/\!/AE$，从而 $CF/\!/$ 平面 PAE，结论正确；

②作 $PM\perp AE$，垂足为 M，因为平面 $PAE\perp$ 平面 $ABCE$，平面 $PAE\cap$ 平面 $ABC=AE$，则 $PM\perp$ 平面 $ABCE$，所以 $PM\perp AB$.

假设 $PE\perp AB$，则 $AB\perp$ 平面 PAE，从而 $AB\perp AE$，这与 $\angle BAE$ 为锐角矛盾，所以假设不成立，结论错误，

选 A.

5．【答案】C

【解析】由八卦图可知，八卦中有 1 卦有三个阳爻，有 3 卦恰有一个阳爻，有 3 卦恰有两个阳爻，有 1 卦没有阳爻．

设取出的两卦中“有一卦恰有一个阳爻，另一卦恰有两个阳爻”为事件 A.

因为 $P(A)=\frac{9}{28}$，选 C.

6. 【答案】C

【解析】设 $g(x)=e^{x}-e^{-x}$，则 $f(x)=g(x-2)$，

因为 $g(-x)=-g(x)$，则 $g(x)$为奇函数，其图象关于坐标原点轴对称，

所以 $f(x)$的图象关于点(2，0)对称，选 C.

7. 【答案】B

【解析】设直线 l 经过椭圆的顶点 B 和焦点 F，$OD\perp BF$，交 BF 于 D，则 $|BF|=\sqrt{b^2+c^2}=a$.

在 Rt△OFB 中，由等面积法易得 $|OF|\cdot|OB|=|BF|\cdot|OD|$，即 $bc=a\cdot\frac{1}{2}b$，∴$a=2c$，

经检验，椭圆 $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$ 满足要求，选 B.

8. 【答案】C

【解析】对 A、D 选项，由正弦定理均可得 $\sin A\cos A=\sin B\cos B$，所以 $\sin 2A=\sin 2B$.

又因为 A，$B\in(0，\pi)$，所以 $2A=2B$ 或 $2A+2B=\pi$，即 $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$，

所以△ABC 是等腰三角形或直角三角形.

对 B 选项，由余弦定理得 $a=\cos B\cdot c=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$，∴$2a^2=a^2+c^2-b^2$，∴$a^2+b^2=c^2$，故△$ABC$ 为直角三角形.

对 C 选项，由正弦定理得 $\sin A\cos B=\sin B\cos A$，所以 $\sin(A-B)=0$，得 $A=B$，能确定△ABC 是等腰三角形，故选 C.

9. 【答案】B

【解析】设 $\{a_n\}$ 的公比为 q，由 a_1+1，a_2+2，a_3+3 也构成等比数列

得 $(aq+2)^2=(a+1)(aq^2+3)$，$aq^2-4aq+3a-1=0(*)$

由 $a>0$ 得 $\Delta=4a^2+4a>0$，故方程（*）必有两个不同的实根.

而 $\{a_n\}$ 唯一，知方程（*）必有一根为 0，代入（*）得 $a=\frac{1}{3}$，故选 B.

10. 【答案】B

【解析】设点 $A(x_1，f(x_1))$，$B(x_2，f(x_2))$，不妨设 $x_1>x_2$，则 $k=\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$.

设 $g(x)=f(x)-x$，则 $g(x)=\ln(e^x+1)-x=\ln(1+\frac{1}{e^x})$，所以 $g(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是减函数.

因为 $x_1>x_2$，则 $g(x_1)<g(x_2)$，即 $f(x_1)-x_1<f(x_2)-x_2$，即 $f(x_1)-f(x_2)<x_1-x_2$，

则 $\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<1$，即 $k<1$，故选 B.

11. 【答案】A

【解析】设 $f(x)$的最小正周期为 T，由图知，$\frac{3}{4}T=\frac{11}{6}-\frac{1}{3}=\frac{3}{2}$，则 $T=2$，所以 $\omega=\frac{2\pi}{T}=\pi$.

因为 $f(\frac{1}{3})=1$，则 $\frac{\pi}{3}+\varphi=\frac{\pi}{2}$，即 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=\sin(\pi x+\frac{\pi}{6})$．

由题设，点 $A(\frac{5}{6},0)$，$B(0,\frac{1}{2})$，$E(\frac{1}{3},1)$，则 $\overrightarrow{BA}=(\frac{5}{6},-\frac{1}{2})$，$\overrightarrow{OE}=(\frac{1}{3},1)$．

因为 $f(x)$的图象关于点 A 对称，则 A 为线段 CD 的中点，

所以 $(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD})\cdot\overrightarrow{OE}=2\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{OE}=2(\frac{5}{18}-\frac{1}{2})=-\frac{4}{9}$，选 A.

12. 【答案】C

【解析】取 AB 的中点 D，则 $CD\perp AB$．因为 $\overrightarrow{PA}=2\overrightarrow{AB}$，则 $|PD|=5|AD|$，

设 $|CD|=d$，则 $\sqrt{|PC|^2-d^2}=5\sqrt{r^2-d^2}$．

因为点 $P(2,2)$，$C(5,6)$，则 $|PC|^2=(5-2)^2+(6-2)^2=25$，

所以 $\sqrt{25-d^2}=5\sqrt{r^2-d^2}$，得 $d^2=\frac{25}{24}(r^2-1)$．

因为 $0\leqslant d<r$，则 $0\leq\frac{25}{24}(r^2-1)<r^2$，解得 $1\leqslant r<5$，选 C.

第Ⅱ卷

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13. 【答案】π

【解析】设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 ϑ，

因为 $|\boldsymbol{a}|=2|\boldsymbol{b}|$，则 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=4|\boldsymbol{b}|^2+4|\boldsymbol{b}|^2\cos\vartheta$.

由 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$ 得 $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，则 $\cos\theta=-1$．

又 $\vartheta\in[0,\pi]$，所以 $\vartheta=\pi$.

14. 【答案】$\sqrt{2}$

【解析】据题意，以 AB 为直径的圆过坐标原点，则 $\angle AOB=90$，

由渐近线的对称性知，渐近线方程为 $y=\pm x$，所以 $\frac{b^2}{a^2}=\frac{c^2-a^2}{a^2}=e^2-1=1$，

故 $e=\sqrt{2}$．

15. 【答案】$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

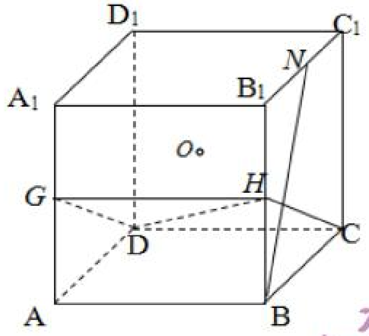
【解析】由已知得 $x\neq0$，$y=\frac{1}{2}(\frac{1}{x}-x)$，所以 $x^2+y^2=x^2+\frac{1}{4}(\frac{1}{x}-x)^2=\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{4x^2}-\frac{1}{2}\geq\frac{\sqrt{5}-1}{2}$，

当且仅当 $\frac{5}{4}x^2=\frac{1}{4x^2}$，即 $x=\pm\sqrt[4]{\frac{1}{5}}$ 时取得等号.

16. 【答案】$\frac{4\sqrt{5}\pi}{5}$

【解析】如图，正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的内切球 O 的半径 $R=1$，

由题意，取 BB_1 的中点 H，连结 CH，则 $CH\perp NB$，$DC\perp NB$，



$\therefore NB\perp$ 平面 DCH，$\therefore$ 动点 M 的轨迹就是平面 DCH 截内切球 O 的交线，

也即平面 $DCHG$ 截内切球 O 的交线，

$\because$ 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长是 2，

$\therefore O$ 到平面 DCH 的距离为 $d=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，截面圆的半径 $r=\sqrt{R^2-d^2}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

所以动点 M 的轨迹的长度为截面圆的周长 $2\pi r=\dfrac{4\sqrt{5}\pi}{5}$

三、解答题：本大题共 6 大题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

（一）必考题：共 60 分．

17. 【答案】（1）$A=\dfrac{\pi}{3}$；（2）$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$．

【解析】（1）在 $\triangle ABC$ 中，$\sin B=\sin(A+C)$，(1 分)$\therefore \sin(A+C)-\sin C=\sin(A-C)$，

即 $\sin A\cos C+\cos A\sin C-\sin C=\sin A\cos C-\cos A\sin C$，整理得 $2\cos A\sin C=\sin C\neq0$，(3 分)

$\therefore \cos A=\dfrac{1}{2}$，$\therefore A=\dfrac{\pi}{3}$．(5 分)

（2）由 $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}|=2\sqrt{2}$，得 $|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2+2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A=8$①(7 分)

由余弦定理得 $|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A=|\overrightarrow{BC}|^2=4$②(9 分)

由①-②得 $4|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos A=4$，

又 $\cos A=\dfrac{1}{2}$，故 $|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|=2$(10 分)

$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$(12 分)

18. 【答案】（1）证明见解析；（2）$2\sqrt{3}$．

【解析】（1）证明：依题意 $A_1A_2/\!/B_1B_2/\!/C_1C_2$，

又 $A_1A_2=1$，$B_1B_2=2$，$C_1C_2=3$，

因此四边形 $A_1A_2B_2B_1$，$A_1A_2C_2C_1$ 均是梯形．(2 分)

由 AA_2 // 平面 $MEFN$，$AA_2\subset$ 平面 AA_2B_2B，且平面 $AA_2B_2B\cap$ 平面 $MEFN=ME$，

可得 AA_2 // ME，即 A_1A_2 // DE．

同理可证 A_1A_2 // FG，所以 DE // FG．(4 分)

又 M，N 分别为 AB，AC 的中点，

则 D，E，F，G 分别为 A_1B_1，A_2B_2，A_2C_2，A_1C_1 的中点，

即 DE，FG 分别为梯形 $A_1A_2B_2B_1$，$A_1A_2C_2C_1$ 的中位线．

因此 $DE=\frac{1}{2}(A_1A_2+B_1B_2)=\frac{3}{2}$，$FG=\frac{1}{2}(A_1A_2+C_1C_2)=2$，

故 $DE<FG$，所以中截面 $DEFG$ 是梯形．(6 分)

（2）解法一：由直线 A_1C_1 与平面 $A_2B_2C_2$ 所成的角为 45°，

过 A_1 作 AC 的平行线交 CC_2 于点 H，则 $\angle C_1A_1H=45^\circ$，

故 $A_1H=2$，，所以底面正三角形的边长为 2．(8 分)

多面体 $A_1B_1C_1$-$A_2B_2C_2$ 的体积

$$V_{A_1B_1C_1-A_2B_2C_2}=V_{A_1-B_1B_2C_2C_1}+V_{A_1-A_2B_2C_2}=\frac{1}{3}\times S_{四边形B_1B_2C_2C_1}\times\sqrt{3}+\frac{1}{3}\times S_{\Delta A_2B_2C_2}\times A_1A_2 \text{ (10 分)}$$

$$=\frac{1}{3}\times 5\times\sqrt{3}+\frac{1}{3}\times\sqrt{3}\times 1=2\sqrt{3} \text{ (12 分)}$$

解法二：由直线 A_1C_1 与平面 $A_2B_2C_2$ 所成的角为 45°

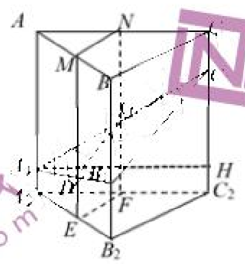
过 A_1 作 AC 的平行线交 CC_2 于点 H，则 $\angle C_1A_1H=45^\circ$，

故 $A_1H=2$，，所以底面正三角形的边长为 2．(8 分)

直三棱柱 $ABC-A_2B_2C_2$ 的体积为 $V_{ABC-A_2B_2C_2}=S_{\Delta A_2B_2C_2}\cdot AA_2=4\sqrt{3}$．(10 分)

由对称性知，多面体 $A_1B_1C_1$-$A_2B_2C_2$ 的体积为直三棱柱 $ABC-A_2B_2C_2$ 的体积的一半，

故 $V_{A_1B_1C_1-A_2B_2C_2}=2\sqrt{3}$ (12 分)



19．【答案】(1) 2040 人；(2) 80 个单位．

【解析】(1) 由频率分布直方图知，免疫力指标在(10，20]中的频率为 0．026×10=0．26．

同理，在(20，30]，(30，40]，(40，50]，(50，60]中的频率分别为 0．4，0．24，0．08，0．02．(2

分)

故免疫力指标不低于 30 的频率为 0．24+0．08+0．02＝0．34．(4 分)

由样本的频率分布，

可以估计这些体检人群中免疫力指标不低于 30 的人数为 6000×0．34＝2040．(5 分)

（2）由散点图知，5 组样本数据$(x，y)$分别为(10，30)，(30，50)，(50，60)，(70，70)，(90，90)，且 x 与 y 具有线性相关关系．（6 分）

因为$\bar{x}$＝50，$\bar{y}$＝60，

则 $b=\dfrac{10\times30+30\times50+50\times60+70\times70+90\times90-5\times50\times60}{10^2+30^2+50^2+70^2+90^2-5\times50^2}=\dfrac{7}{10}$，（8 分）

$a=60-\dfrac{7}{10}\times50=25$，

所以回归直线方程为 $y=0.7x+25$．（10 分）

由直方图知，免疫力指标的平均值为 $15\times\dfrac{26}{100}+25\times\dfrac{40}{100}+35\times\dfrac{24}{100}+45\times\dfrac{8}{100}+55\times\dfrac{2}{100}=27$．（11 分）

由 $y\leqslant27\times3=81$，得 $0.7x+25\leqslant81$，解得 $x\leqslant80$．

据此估计，疫苗注射量不应超过 80 个单位．（12 分）

20．【答案】（1）$y^2=4x$；（2）点 F 在圆 G 上，详见解析．

【解析】（1）设 $Q(x，y)$，因为动圆 Q 过定点(2，0)且与 y 轴截得的弦 MN 的长为 4，

所以$(\dfrac{MN}{2})^2+|x|^2=|TQ|^2$，（2 分）

所以$|x|^2+2^2=(x-2)^2+y^2$，整理得 $y^2=4x$．

所以动圆圆心 Q 的轨迹 C 的方程是 $y^2=4x$．（4 分）

（2）设直线 l 的方程为 $x=ty+1(t\neq0)$，代入 $y^2=4x$，得 $y^2-4ty-4=0$．

设点 $A(\dfrac{y_1^2}{4},y_1)$，$B(\dfrac{y_2^2}{4},y_2)$，则 $y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-4$．（6 分）

已知点 $P(1,2)$，则 $k_{PA}=\dfrac{y_1-2}{\dfrac{y_1^2}{4}-1}=\dfrac{4}{y_1+2}$，直线 PA 的方程为 $y-2=\dfrac{4}{y_1+2}(x-1)$．

令 $x=-1$，得 $y=2-\dfrac{8}{y_1+2}=\dfrac{2y_1-4}{y_1+2}$，所以点 $D(-1,\dfrac{2y_1-4}{y_1+2})$．（8 分）

同理，点 $E(-1,\dfrac{2y_2-4}{y_2+2})$．（9 分）

则 $\overrightarrow{FD}=(-2,\dfrac{2y_1-4}{y_1+2})$，$\overrightarrow{FE}=(-2,\dfrac{2y_2-4}{y_2+2})$．（10 分）

则 $\overrightarrow{FD}\cdot\overrightarrow{FE}=4+\dfrac{2y_1-4}{y_1+2}\cdot\dfrac{2y_2-4}{y_2+2}$

$$=4+\frac{4(y_1-2)(y_2-2)}{(y_1+2)(y_2+2)}=4\left[1+\frac{(y_1-2)(y_2-2)}{(y_1+2)(y_2+2)}\right]=4\cdot\frac{2y_1y_2+8}{(y_1+2)(y_2+2)}=0$$

故点 F 在圆 G 上．（12 分）

21．【答案】（1）$[1，+\infty)$；（2）证明见解析．

【解析】（1）$f'(x)=\ln x+1-ax$．

因为 $f(x)$ 在 $(0，+\infty)$ 内是减函数，则当 $x>0$ 时，$f'(x)\le 0$ 恒成立，

即 $\ln x+1-ax\le 0$，即 $a\ge \dfrac{\ln x+1}{x}$ 恒成立．（2 分）

设 $g(x)=\dfrac{\ln x+1}{x}$，则 $g'(x)=\dfrac{1-(\ln x+1)}{x^2}=-\dfrac{\ln x}{x^2}$．（4 分）

由 $g'(x)>0$，得 $\ln x<0$，即 $0<x<1$，

所以 $g(x)$ 在 $(0，1)$ 上单调递增，在 $(1，+\infty)$ 上单调递减，从而 $g(x)_{\max}=g(1)=1$，

因为 $a\geqslant g(x)$ 恒成立，所以 a 的取值范围是 $[1，+\infty)$．（6 分）

（2）解法一：若 $a<0$，

$x\in(0,1)$ 时，$f(x)=x\ln x-\dfrac{a}{2}(x^2-1)<0$，故 $y=f(x)$ 在 $(0，1)$ 上没有零点（8 分）

$x\in(1,+\infty)$ 时，$f'(x)=\ln x+1-ax>0$，$y=f(x)$ 在 $(1，+\infty)$ 上单调递增（10 分）

又 $f(1)=0$，$x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)>0$，故 $y=f(x)$ 在 $(1，+\infty)$ 上没有零点

所以 $f(x)$ 有且仅有一个零点．（12 分）

解法二：$f(x)=x\ln x-\dfrac{a}{2}(x^2-1)=x\left[\ln x-\dfrac{a}{2}(x-\dfrac{1}{x})\right]$（8 分）

设 $\varphi(x)=\ln x-\dfrac{a}{2}(x-\dfrac{1}{x})$，$\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{a}{2}(1+\dfrac{1}{x^2})>0$，（10 分）

故 $y=\varphi(x)$ 单调递增，故在 $(0，+\infty)$ 至多只有一个零点

又 $\varphi(1)=0$，所以 $f(x)$ 有且仅有一个零点．（12 分）

（二）选考题：共 10 分

22．【答案】（1）C_1：$y=x+1$，C_2：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$；（2）4．

【解析】（1）因为 $y=\dfrac{\sqrt{2}\sin(\alpha+\frac{\pi}{4})}{\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha+1$，$x=\tan\alpha$，则 $y=x+1$．

所以曲线 C_1 的普通方程是 $y=x+1$．（3 分）

由 $\rho^2=\dfrac{4}{2-\cos^2\theta}$，得 $2\rho^2-\rho^2\cos^2\theta=4$．将 $x^2+y^2=\rho^2$，$x=\rho\cos\theta$ 代入得 $x^2+2y^2=4$，

所以曲线 C_2 的直角坐标方程是 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1$．（5 分）

（2）因为直线 C_1 过点 $P(0，1)$，倾斜角为 45°，则直线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）．

（8 分）

代入$x^2+2y^2=4$，得$\frac{t^2}{2}+2(1+\frac{\sqrt{2}}{2}t)^2=4$，即$3t^2+4\sqrt{2}t-4=0$.

设方程的两根为t_1，t_2，由参数t的几何意义知，$|PA|\cdot|PB|=|t_1t_2|=\frac{4}{3}$.　　（10 分）

23. 【答案】（1）$(-\frac{13}{3},1)$；（2）$(-\infty，2]$.

【解析】（1）当$a=1$时，$f(x)=|x-1|+2|x+3|$.　（1 分）

当$x\geqslant1$时，$f(x)=(x-1)+2(x+3)=3x+5\in[8,+\infty)$，此时原不等式无解；（2 分）

当$-3\leqslant x<1$时，$f(x)=-(x-1)+2(x+3)=x+7\in[4,8)$，此时原不等式恒成立；（3 分）

当$x<-3$时，$f(x)=-(x-1)-2(x+3)=-3x-5$，由$\begin{cases}x<-3\\-3x-5<8\end{cases}$，得$-\frac{13}{3}<x<-3$.　（4 分）

综上分析，原不等式解集是$(-\frac{13}{3},1)$.　（5 分）

（2）因为$f(x)=|x-a|+|x+3|+|x+3|\geq|x-a|+|x+3|\geq|(x-a)-(x+3)|=|a+3|$，

当$x+3=0$且$(x-a)(x+3)\leq0$，即$x=-3$时取等号，则$f(x)_{\min}=|a+3|$.　（7 分）

因为对任意$x\in\mathbf{R}$，$f(x)\geqslant2a+1$恒成立，则$f(x)_{\min}\geq2a+1$，即$|a+3|\geq2a+1$.　（8 分）

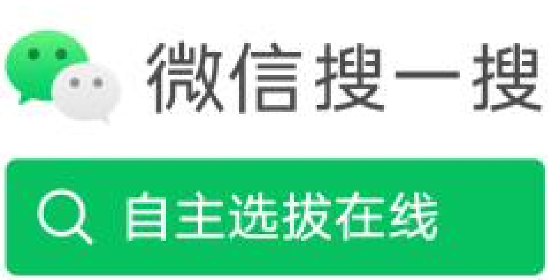
所以$\begin{cases}a+3\geq0\\a+3\geq2a+1\end{cases}$或$\begin{cases}a+3<0\\-(a+3)\geq2a+1\end{cases}$，解得$-3\leqslant a\leqslant2$或$a<-3$，即$a\leqslant2$.

所以a的取值范围是$(-\infty，2]$.　（10 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（http://www.zizzs.com/）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》