高一联考数学参考答案

1. B　这 5 万名高中生的身高的全体是指总体，故选 B.

2. A　依四棱柱、直四棱柱、正四棱柱和长方体的定义，易得 A 正确. 故选 A.

3. D　由 $z=\frac{i^2}{2+3i}=\frac{-(2-3i)}{2^2+3^2}=-\frac{2}{13}+\frac{3}{13}i$，得 $\bar{z}=-\frac{2}{13}-\frac{3}{13}i$.

4. C　由题意得 $\overrightarrow{AB}=(m-1,2)$，所以 $2(m-1)-2=0$，得 $m=2$.

5. B　据图可得该几何体的侧面是等边三角形或正方形，A 正确；该几何体恰有 14 个面，B 不正确；该几何体恰有 24 条棱，C 正确；该几何体恰有 12 个顶点，D 正确.

6. C　平均数为 $\frac{(3x_1-1)+(3x_2-1)+\cdots+(3x_n-1)}{n}=\frac{3(x_1+x_2+\cdots+x_n)-n}{n}=\frac{3nx-n}{n}=3x-1$，

方差为 $\frac{[(3x_1-1)-(3x-1)]^2+[(3x_2-1)-(3x-1)]^2+\cdots+[(3x_n-1)-(3x-1)]^2}{n}=\frac{9[(x_1-x)^2+(x_2-x)^2+\cdots+(x_n-x)^2]}{n}=9s^2$，故选 C.

7. B　易得 $EF\parallel BB_1$，$MN\parallel BC_1$，所以异面直线 EF 和 MN 所成的角为 $\angle B_1BC_1=\frac{\pi}{4}$.

8. C　由余弦定理可得 $AH=\sqrt{AB^2+BH^2-2AB\cdot BH\cdot\cos\angle ABH}=\sqrt{1600+400+1600\times0.31}=\sqrt{2496}=8\sqrt{39}$. 依题意得 $\angle QAH=48.24°$，则 $\frac{QH}{AH}=\tan 48.24°=1.12$，所以 $QH=1.12AH=8.96\sqrt{39}=8.96\times6.25=56$，则 $PH\approx15+56=71$，故佛像全身高度约为 71 米.

9. ABD　因为 $z=2-i$，所以 $\bar{z}=2+i$，A 正确；z 的虚部为 -1，B 正确；$z-i=2-2i$，不是纯虚数，C 错误；因为 $z^2-4z+5=(2-i)^2-4(2-i)+5=4-4i+i^2-8+4i+5=0$，所以 z 是方程 $x^2-4x+5=0$ 的一个复数根，D 正确.

10. AB　该地区 2023 年的学生人数约为 $\frac{1.2}{0.08}=15$ 万，该地区 2023 年高中生的人数比八年级学生人数的 2 倍还多，该地区 2023 年小学生的人数少于初中生、高中生和大学生的人数之和，该地区 2023 年九年级的学生人数在初中生人数中的占比约为 39.1%，故选 AB.

11. ACD　由 $a\cos B=b\cos A$，可得 $\sin A\cos B=\sin B\cos A$，则 $\sin(A-B)=0$，因为 $-\pi<A-B<\pi$，所以 $A-B=0$，即 $A=B$，所以 $\triangle ABC$ 为等腰三角形，A 正确.

若 $B=\frac{\pi}{4}$，$c=\sqrt{2}$，$b=\frac{6}{5}$，则 $c\sin B=1<\frac{6}{5}<\sqrt{2}$，此时 $\triangle ABC$ 有两解，B 错误.

若 $b\cos A+(a-2c)\cos B=0$，则 $\sin B\cos A+(\sin A-2\sin C)\cos B=0$，则 $\sin(B+A)=2\sin C\cos B$，即 $\sin C=2\sin C\cos B$，因为 $\sin C>0$，所以 $\cos B=\frac{1}{2}$，则 $B=\frac{\pi}{3}$，C 正确.

若 $\triangle ABC$ 为锐角三角形，则 $A+B>\frac{\pi}{2}$，$A>\frac{\pi}{2}-B$，且 $A\in(0,\frac{\pi}{2})$，$\frac{\pi}{2}-B\in(0,\frac{\pi}{2})$，$a^2+b^2$

$-c^2>0$，所以 $\sin A>\sin(\frac{\pi}{2}-B)=\cos B$，所以 $(a^2+b^2-c^2)\sin A>(a^2+b^2-c^2)\cos B$，D 正确.

12. AD　若 $BD_1\perp MC$，则 BD_1 在平面 BB_1C_1C 上的投影在 BC_1 上，则 $BC_1\perp MC$，所以点 M 的轨迹为 B_1C(除去点 C)，所以点 M 的轨迹长度为 $3\sqrt{2}$，将平面 AB_1C 翻折到与平面 BB_1C 重合，此时 A,M,B 三点共线，$AM+BM$ 取得最小值，最小值为 $\frac{3\sqrt{2}+3\sqrt{6}}{2}$，故选 AD.

13. 11　由 $\frac{3}{15}=\frac{n}{30+15+10}$，得 $n=11$.

14. 3；6　因为 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{AF}+2\overrightarrow{AB}$，所以 $x+y=3$.

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{EC}=(\overrightarrow{AF}+2\overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AF})=2\overrightarrow{AB}^2-\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AF}^2=8-2\times2\times(-\frac{1}{2})-4=6$.

15. 8(或 11 或 12，写对一个即得满分)　这组数据的 60%分位数为 $\frac{a_3+a_4}{2}$，这组数据的 30%分位数为 a_2，据题意有 $\frac{a_3+a_4}{2}=1.5a_2$，即 $a_3+a_4=3a_2$.

因为 $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=25$，即 $a_1+4a_2+a_5=25$，所以 $2\leqslant a_2\leqslant 4$.

若 $a_2=2$，则 $a_1=1$，$a_3+a_4=6$，无法找到满足题意的 a_3 和 a_4.

若 $a_2=3$，则 $a_3+a_4=9$，可得 $a_3=4$，$a_4=5$，所以 $a_1+a_5=13$，则 $\begin{cases}a_1=1,\\a_5=12\end{cases}$ 或 $\begin{cases}a_1=2,\\a_5=11.\end{cases}$

若 $a_2=4$，则 $a_3+a_4=12$，可得 $a_3=5$，$a_4=7$，所以 $a_1+a_5=9$，则 $\begin{cases}a_1=1,\\a_5=8.\end{cases}$

故 a_5 的值为 8 或 11 或 12.

16. 12π　取 O 为 CD 的中点(图略)，则 $PO\perp CD$，因为平面 $PCD\perp$ 平面 $ABCD$ 且相交于 CD，所以 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，则 $\angle PBO$ 为 PB 与平面 $ABCD$ 所成的角，即 $\tan\angle PBO=\frac{PO}{OB}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，解得 $OC=\sqrt{2}$，$DC=2\sqrt{2}$. 易知 $BC\perp$ 平面 PCD，且 $PC\perp PD$，所以四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的球心为矩形 $ABCD$ 的中心，四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的半径 $R=\sqrt{2+1}=\sqrt{3}$，即四棱锥 $P-ABCD$ 外接球的表面积为 12π.

17. 解：(1)由正弦定理得 $b^2+\sqrt{3}ac=a^2+c^2$，即 $a^2+c^2-b^2=\sqrt{3}ac$，…………………………… 2 分

所以 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{\sqrt{3}}{2}$. …………………………………………………… 4 分

因为 $0<B<\pi$，所以 $B=\frac{\pi}{6}$. ………………………………………………………… 5 分

(2)由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，…………………………………………………… 7 分

则 $a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{2\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}}=2\sqrt{6}$. …………………………………………………… 10 分

18. 解：(1) $z_1z_2=(1+\mathrm{i})(\sqrt{3}-\mathrm{i})=\sqrt{3}+1+(\sqrt{3}-1)\mathrm{i}$， …………………………… 3 分

所以 $|z_1z_2|=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$. …………………………… 5 分

(2) 由题设，$z_2-z_1=(\sqrt{3}-1)-2\mathrm{i}$，复数 z 的虚部等于复数 z_2-z_1 的虚部，

所以可设 $z=a-2\mathrm{i}(a\in\mathbf{R})$，…………………………… 7 分

又 $|z|=3$，所以 $a^2+4=9$，解得 $a=\sqrt{5}$ 或 $-\sqrt{5}$，…………………………… 10 分

因为复数 z 在复平面内对应的点位于第三象限，

所以 $a=-\sqrt{5}$，故 $z=-\sqrt{5}-2\mathrm{i}$. …………………………… 12 分

19. 解：(1) 由题意得 $\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{2},3\sqrt{2})$，…………………………… 1 分

则 $\overrightarrow{AP}=(-\sqrt{2}\cos\dfrac{3\pi}{4}-3\sqrt{2}\sin\dfrac{3\pi}{4},-\sqrt{2}\sin\dfrac{3\pi}{4}+3\sqrt{2}\cos\dfrac{3\pi}{4})=(-2,-4)$，…………… 3 分

设 $P(a,b)$，则 $\overrightarrow{AP}=(a+2,b-1)=(-2,-4)$，得 $\begin{cases}a+2=-2,\\ b-1=-4,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a=-4,\\ b=-3.\end{cases}$ ………… 5 分

故 P 的坐标为 $(-4,-3)$. …………………………… 6 分

(2) 由 (1) 得 $\overrightarrow{OP}=(-4,-3)$，$\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AP}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{AB}=(-2,-4)+(-1,3)=(-3,-1)$，……

…………………………… 8 分

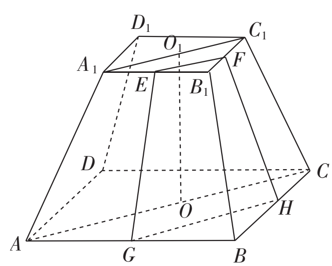
所以向量 $\overrightarrow{OP}$ 在 $\overrightarrow{CD}$ 上的投影向量的坐标为 $\dfrac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|}\cdot\dfrac{\overrightarrow{CD}}{|\overrightarrow{CD}|}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{CD}=(-\dfrac{9}{2},-\dfrac{3}{2})$. ……

…………………………… 12 分

20. (1) 解：连接 AC，A_1C_1，取 O，O_1 分别为 AC 和 A_1C_1 的中点.

因为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正四棱台，所以 $A_1C_1/\!/AC$，且 OO_1 为 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的高. …………………………… 2 分

因为 $A_1B_1=1$，$AB=AA_1=3$，所以 $OO_1=\sqrt{7}$，…………… 3 分



所以正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 $\dfrac{1}{3}\times\sqrt{7}\times(1^2+3^2+\sqrt{1^2\times3^2})=\dfrac{13\sqrt{7}}{3}$. …………………………… 6 分.

(2) 证明：因为 E，F，G，H 分别为棱 A_1B_1，B_1C_1，AB，BC 的中点，所以 $EF/\!/A_1C_1$，$GH/\!/AC$，…………………………… 7 分

所以 $EF/\!/GH$，所以 $EFHG$ 为梯形，则 EG 与 FH 必相交. …………………………… 8 分

设 $EG\cap FH=P$，因为 $EG\subset$ 平面 AA_1B_1B，所以 $P\in$ 平面 AA_1B_1B，…………………… 9 分

因为 $FH\subset$ 平面 BB_1C_1C，所以 $P\in$ 平面 BB_1C_1C，…………………………… 10 分

又平面 $AA_1B_1B\cap$ 平面 $BB_1C_1C=BB_1$，所以 $P\in BB_1$，…………………………… 11 分

则 GE，FH，BB_1 交于一点. …………………………… 12 分

21. 解：(1) 由题意，$\begin{cases}10(2a+0.020+0.030+b+0.005)=1,\\ 5a=2b,\end{cases}$ …………………………… 2 分

解得 $a=0.010$,…………………………………………………………………… 3 分

$b=0.025$. ………………………………………………………………………… 4 分

(2)企业生产的该批产品的质量的平均数约为 $10\times(45\times0.010+55\times0.010+65\times0.020+75\times0.030+85\times0.025+95\times0.005)=71.5$ g. ……………………………… 8 分

(3)等级达到 C 及以上的占比为 $12\%+32\%+37\%=81\%$, ………………………… 9 分

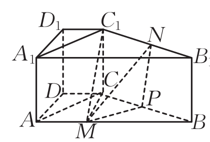
设该批产品中 C 等级及以上等级的产品质量至少为 x g,易得 $50<x<60$,

则 $(0.005+0.025+0.030+0.020)\times10+(60-x)\times0.010=0.81$, ……………… 10 分

解得 $x=59$, ………………………………………………………………………… 11 分

所以该批产品中 C 等级及以上等级的产品质量至少为 59 g. …………………… 12 分

22.(1)证明:因为 $AM=1$,所以 $AM=CD$,$AM/\!/CD$,又 $AB\perp AD$,所以四边形 $ADCM$ 为矩形,即 $DC\perp CM$. ……………………………………………………………………… 2 分



由题可知 $CC_1\perp$ 平面 $ABCD$,所以 $CC_1\perp CM$, ……………………… 3 分

又 $CC_1\cap DC=C$,所以 $CM\perp$ 平面 DCC_1D_1, …………………………… 4 分

因为 $CM\subset$ 平面 MCC_1,所以平面 $MCC_1\perp$ 平面 DCC_1D_1. ………… 5 分

(2)解:作 $MP/\!/AC$,交 BC 于点 P,连接 NP,则 $BP=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

因为 $MP\not\subset$ 平面 ACC_1A_1,$AC\subset$ 平面 ACC_1A_1,所以 $MP/\!/$ 平面 ACC_1A_1, …………… 6 分

因为 $MN/\!/$ 平面 ACC_1A_1, ……………………………………………………… 7 分

又 $MN\cap MP=M$,所以平面 $MNP/\!/$ 平面 ACC_1A_1. ……………………………… 8 分

平面 BCC_1B_1 和平面 MNP,平面 ACC_1A_1 的交线分别为 NP 和 CC_1,所以 $NP/\!/CC_1$.

因为 $BP=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,所以 $B_1N=\frac{3\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………… 10 分

四面体 $MNBB_1$ 的体积为 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times2\times\frac{3\sqrt{3}}{2}\times\frac{3}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{4}$. ………………………… 12 分