参考答案及解析

2023届山东省高三第三次学业质量联合检测·数学

一、选择题

1. C 【解析】由题意得 $A=\{x\mid x\geqslant 0\}=[0,+\infty)$，$B=(0,+\infty)$，所以 $A\cap B=B$，故选 C.

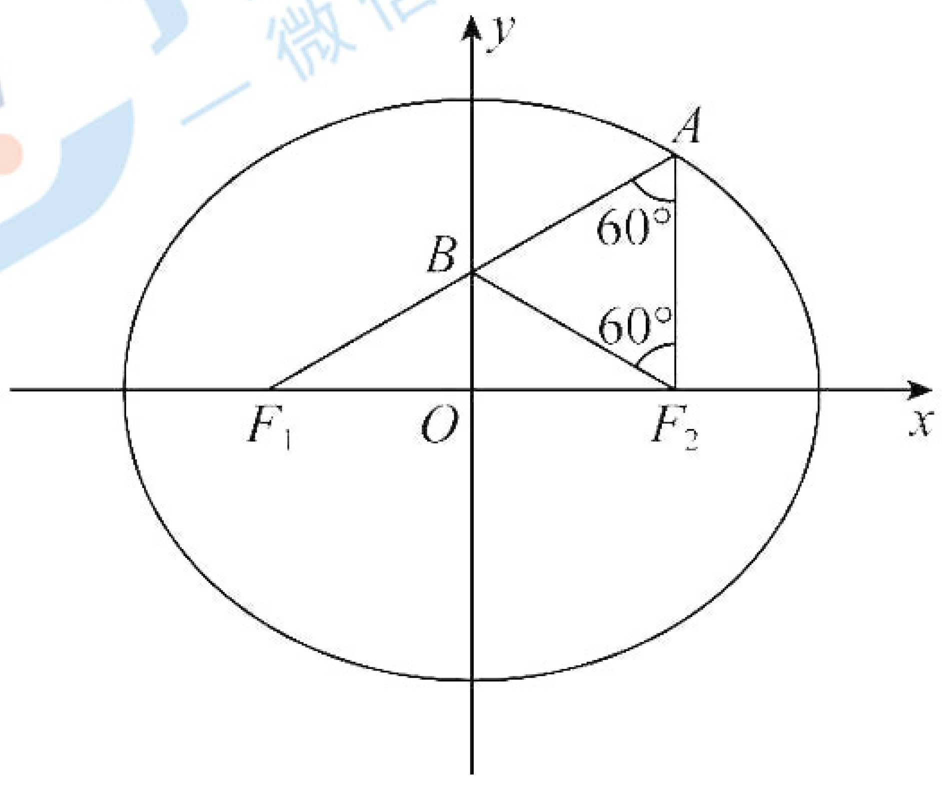
2. B 【解析】由 $x^2+x+1=0$，得 $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. 当 $z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$z_2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 时，$\overline{z_1}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$\overline{z_2}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，所以 $(\overline{z_1}-\overline{z_2})^3=(-\sqrt{3}\mathrm{i})^3=3\sqrt{3}\mathrm{i}$；同理，当 $z_1=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$，$z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$ 时，$(\overline{z_1}-\overline{z_2})^3=(\sqrt{3}\mathrm{i})^3=-3\sqrt{3}\mathrm{i}$，故选 B.

3. B 【解析】由 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2$，得 $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2=\frac{a^2+b^2-2ab}{ab}=\frac{(a-b)^2}{ab}\geqslant 0$，于是 $ab>0$，则 $a>0,b>0$ 或 $a<0,b<0$，所以充分性不成立；反之，当 $a>0,b>0$ 时，$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}=2$（当且仅当 $a=b$ 时，取等号），则必要性成立. 故选 B.

4. A 【解析】设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，由 $a_5=5$，得 $a_1+4d=5$ ①；由 $a_1+S_{11}=67$，得 $12a_1+\frac{11\times 10}{2}d=67$，即 $12a_1+55d=67$ ②. 由①②解得 $a_1=1$，$d=1$，所以 $a_n=n$，于是 $a_3a_{10}=3\times 10=30$，是 $\{a_n\}$ 中的第 30 项，故选 A.

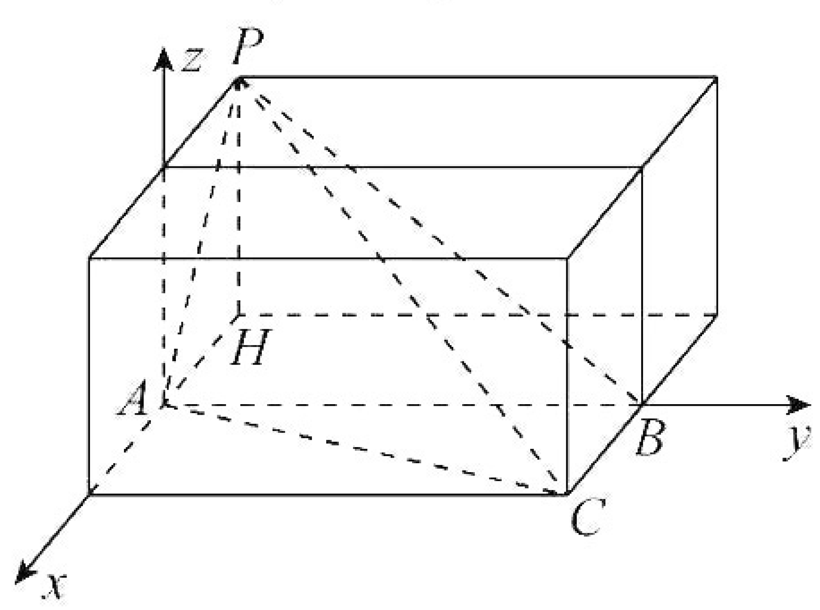
5. B 【解析】因为 $\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{HE}+\overrightarrow{EL}+\overrightarrow{LF}=\overrightarrow{HE}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{EK}+\overrightarrow{HJ}$，$\overrightarrow{EK}=\overrightarrow{HK}-\overrightarrow{HE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{HJ}-\overrightarrow{HE}$，所以 $\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{HE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{EK}+\overrightarrow{HJ}=\overrightarrow{HE}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{HJ}-\overrightarrow{HE}\right)+\overrightarrow{HJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{HE}+\frac{10}{9}\overrightarrow{HJ}$，所以 $\lambda+\mu=\frac{2}{3}+\frac{10}{9}=\frac{16}{9}$，故选 B.

6. A 【解析】如图，由 $\angle F_1AF_2=\angle AF_2B=60^\circ$，得 $\triangle AF_2B$ 为等边三角形，再结合对称性及椭圆的定义，得 $|AB|=|BF_2|=|BF_1|=|AF_2|=\frac{2a}{3}$，则 B 为 AF_1 的中点，从而 OB 为 $\triangle F_1AF_2$ 的中位线，$OB\parallel AF_2$，所以 $AF_2\perp F_1F_2$，所以 $|F_1F_2|=\sqrt{3}|AF_2|$，即 $2c=\frac{2\sqrt{3}a}{3}$，则 $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，故选 A.



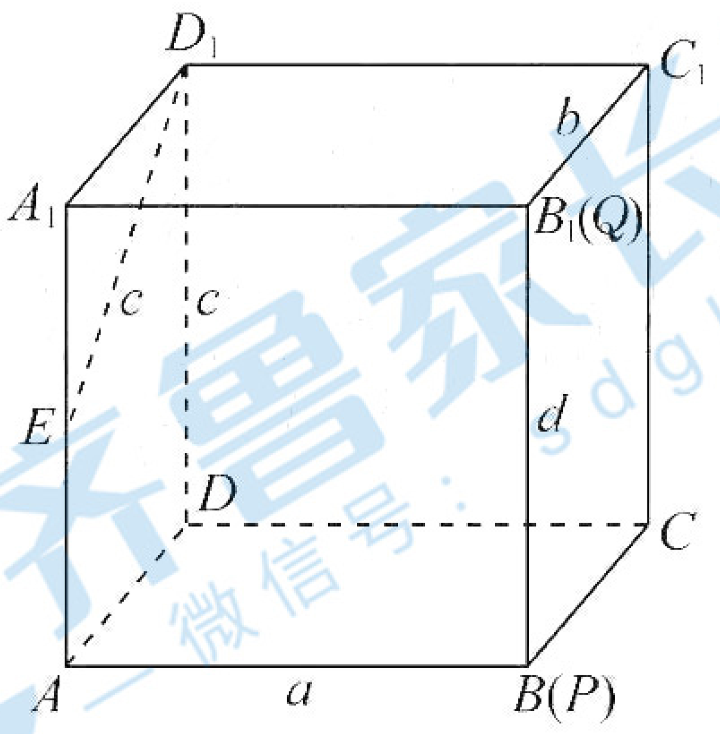
7. C 【解析】由 $y=f(x+k)-k$ 是 $\mathbf{R}$ 上的偶函数，得 $f(-x+k)-k=f(x+k)-k$，即 $f(-x+k)=f(x+k)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=k$ 对称. 当 $x\geqslant k$ 时，由 $f'(x)=\frac{2(\cos x-1)}{e^x}\leqslant 0$，得 $f(x)$ 在区间 $[k,+\infty)$ 上为减函数. 根据 $f(x)$ 图象的对称性，得 $|x_1-k|<|x_2-k|$，则 C 正确、D 错误. 又显然 A，B 均错误，故选 C.

8. D 【解析】设点 P 在平面 ABC 内的射影为 H，考虑到二面角 P-AB-C 的大小为 135°，则点 H 与点 C 在直线 AB 的两侧. 如图，连接 AH，因为 $PA\perp AB$，所以 $\angle PAH=45^\circ$，又 $PA=\sqrt{2}$，所以 $PH=AH=1$，从而三棱锥 P-ABC 的高为 1. 要使三棱锥 P-ABC 的体积最大，必须使 $\triangle ABC$ 的面积最大，此时只需 $AB\perp BC$. 因此点 C 和点 P 在图中两全等长方体构成的大长方体的体对角线的顶点上. 以 A 为坐标原点，建立如图所示的空间直角坐标系 $Axyz$. 易知球 O 的球心 O 在底面 ABC 内的射影为线段 AC 的中点，于是设 $O\left(\frac{1}{2},1,z\right)$. 又 $A(0,0,0)$，$P(-1,0,1)$，由 $|OA|=|OP|$，得 $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+1^2+z^2}=\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2+(-1)^2+(1-z)^2}$，解得 $z=\frac{3}{2}$，则球 O 的半径 $OA=\frac{\sqrt{14}}{2}$，所以球 O 的体积 $V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4\pi}{3}\times\left(\frac{\sqrt{14}}{2}\right)^3=\frac{7\sqrt{14}}{3}\pi$. 故选 D.



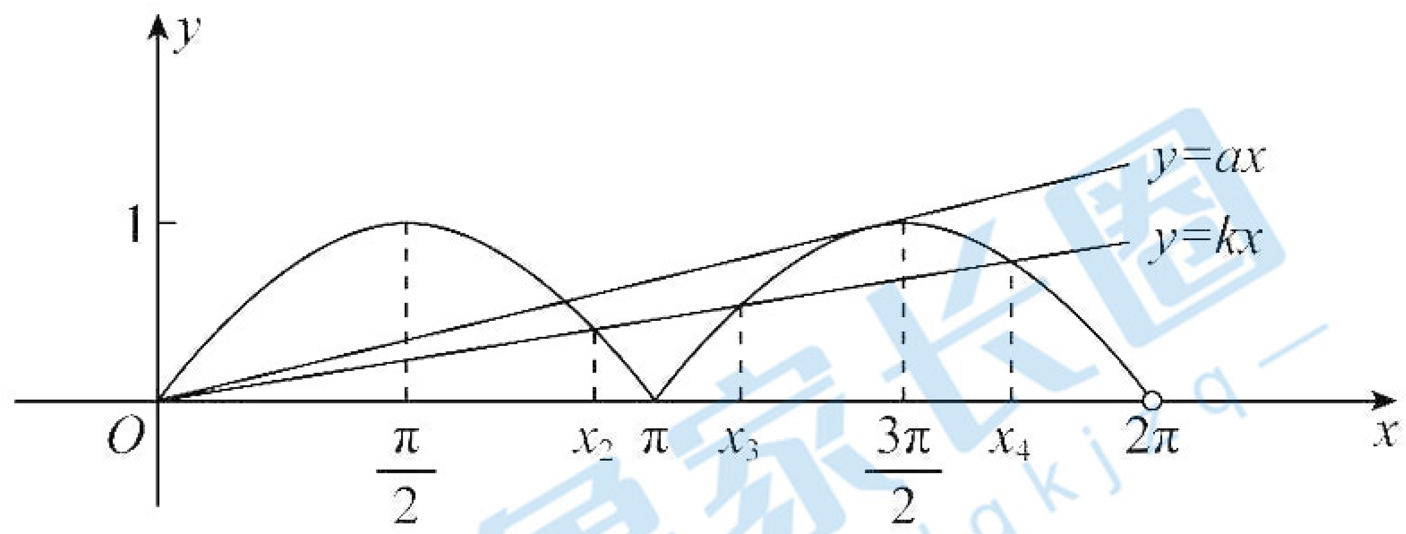
二、选择题

9. BC 【解析】如图，在正方体 $ABCD\text{-}A_1B_1C_1D_1$ 中，E 是 AA_1 上一点（异于 A_1），AB，B_1C_1，BB_1 所在直线分别为 a，b，d．当 DD_1 所在直线为 c 时，c 与 d 平行；当 D_1E 所在直线为 c 时，c 与 d 异面；若 c 与 d 相交，则 a 垂直于 c，d 确定的平面，又 a 垂直于 b，d 确定的平面，易推出 b 与 c 共面，与已知矛盾；若 c 与 d 垂直，则 c 垂直于 a，d 确定的平面，而 b 垂直于 a，d 确定的平面，推出 b 与 c 平行或重合，与已知矛盾，故选 BC．



10. BCD 【解析】若该家庭中有两个小孩，样本空间为 $\Omega=\{$(男，男)，(男，女)，(女，男)，(女，女)$\}$，$M=\{$(男，女)，(女，男)$\}$，$N=\{$(男，男)，(男，女)，(女，男)$\}$，$MN=\{$(男，女)，(女，男)$\}$，则 M 与 N 不互斥，$P(M)=\dfrac{1}{2}$，$P(N)=\dfrac{3}{4}$，$P(MN)=\dfrac{1}{2}$，于是 $P(MN)\neq P(M)P(N)$，所以 M 与 N 不相互独立，则 A 错误、B 正确；若该家庭中有三个小孩，样本空间为 $\Omega=\{$(男，男，男)，(男，男，女)，(男，女，男)，(女，男，男)，(男，女，女)，(女，男，女)，(女，女，男)，(女，女，女)$\}$，$M=\{$(男，男，女)，(男，女，男)，(女，男，男)，(男，女，女)，(女，男，女)，(女，女，男)$\}$，$N=\{$(男，男，男)，(男，男，女)，(男，女，男)，(女，男，男)$\}$，$MN=\{$(男，男，女)，(男，女，男)，(女，男，男)$\}$，则 M 与 N 不互斥，$P(M)=\dfrac{3}{4}$，$P(N)=\dfrac{1}{2}$，$P(MN)=\dfrac{3}{8}$，于是 $P(MN)=P(M)P(N)$，所以 M 与 N 相互独立，则 C 和 D 均正确．综上，故选 BCD．

11. AC 【解析】由 $f(x)=0$，得 $|\sin x|=kx$．由题意知，当 $0\leqslant x<2\pi$ 时，直线 $y=kx$ 与函数 $y=|\sin x|$ 的图象有四个交点，且交点的横坐标分别为 $x_1=0$，x_2，x_3，x_4，如图．设直线 $y=kx$ 与曲线 $y=|\sin x|$（$x\in[\pi,2\pi)$）相切时 k 的值为 a，于是斜率 k 的取值范围为 $(0,a)$．根据 $y=|\sin x|$（$x\in[0,2\pi)$）的图象知，$|\sin x_3|>|\sin x_2|$，得 $|\sin(x_3-\pi)|>|\sin(\pi-x_2)|$，又 $0<x_3-\pi<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\pi-x_2<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $x_3-\pi>\pi-x_2$，从而 $x_2+x_3>2\pi$，则 A 正确；由 $|\sin x_4|>|\sin x_2|$，得 $\left|\cos\left(x_4-\dfrac{3\pi}{2}\right)\right|>\left|\cos\left(x_2-\dfrac{\pi}{2}\right)\right|$，又 $0<x_4-\dfrac{3\pi}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，$0<x_2-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $x_4-\dfrac{3\pi}{2}<x_2-\dfrac{\pi}{2}$，从而 $x_4-x_2<\pi$，则 B 错误；由 $|\sin x_4|>|\sin x_3|$，得 $\left|\cos\left(x_4-\dfrac{3\pi}{2}\right)\right|>\left|\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-x_3\right)\right|$，又 $0<x_4-\dfrac{3\pi}{2}<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\dfrac{3\pi}{2}-x_3<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $x_4-\dfrac{3\pi}{2}<\dfrac{3\pi}{2}-x_3$，从而 $x_3+x_4<3\pi$，则 C 正确；因为 $x_2<x_3<x_4$，$k\in(0,a)$，当 k 接近 0 时，x_3 离 x_2 比离 x_4 近，所以 $x_2+x_4>2x_3$；当 k 接近 a 时，x_3 离 x_4 比离 x_2 近，所以 $x_2+x_4<2x_3$，所以 x_2+x_4 与 $2x_3$ 的大小关系是不确定的，则 D 错误．综上，故选 AC．



12. BC 【解析】当 $1<a<3$ 时，$\log_3 a=\log_4 2$，即 $\log_3 a=\dfrac{1}{2}$，亦即 $a=3^{\frac{1}{2}}=\sqrt{3}$；当 $a>3$ 时，$\log_a 3=\log_4 2$，即 $\log_a 3=\dfrac{1}{2}$，亦即 $a=9$．综上，当 $a>1$ 时，$a=\sqrt{3}$ 或 $a=9$，则 A 错误；由 $\dfrac{a*b}{b*c}=c*a$ 及 $a\geqslant b\geqslant c>1$，得 $\log_a b=\log_b c\cdot\log_a c$，即 $\dfrac{\lg b}{\lg a}=\dfrac{\lg c}{\lg b}\cdot\dfrac{\lg c}{\lg a}$，即 $\lg^2 b=\lg^2 c$，即 $\lg b=\lg c$ 或 $\lg b=-\lg c$，即 $b=c$ 或 $bc=1$．由 $b\geqslant c>1$，得 $bc>1$，从而可得 $b=c$，则 B 正确；若 $0<a<b<c<1$，则 $a*b-a*c=\log_a b-\log_a c=\log_a\dfrac{b}{c}$，而由 $1>\dfrac{b}{c}>b>a>0$，得 $a*\left(\dfrac{b}{c}\right)=\log_a\dfrac{b}{c}$，所以 $a*b-a*c=a*\left(\dfrac{b}{c}\right)$ 成立，则 C 正确；由指数函数 $f(t)=a^t$（$0<a<1$）是减函数，且 $x>y$，可得 $a^x<a^y$；由幂函数 $h(x)=x^y$（$y>0$）是增函数，且 $a<b$，可得 $a^y<b^y$，于是 $0<a^x<b^y<1$，所以 $a^x*b^y=\log_{a^x}b^y=\dfrac{y}{x}\log_a b$，同理 $b^y*c^z=\dfrac{z}{y}\log_b c$，$a^x*c^z=\dfrac{z}{x}\log_a c$，所以 $\dfrac{(a^x*b^y)\cdot(b^y*c^z)}{a^x*c^z}=\dfrac{\dfrac{y}{x}\log_a b\cdot\dfrac{z}{y}\log_b c}{\dfrac{z}{x}\log_a c}=\dfrac{\log_a b\cdot\dfrac{\log_a c}{\log_a b}}{\log_a c}=1$，则 D 错误．综上，故选 BC．

三、填空题

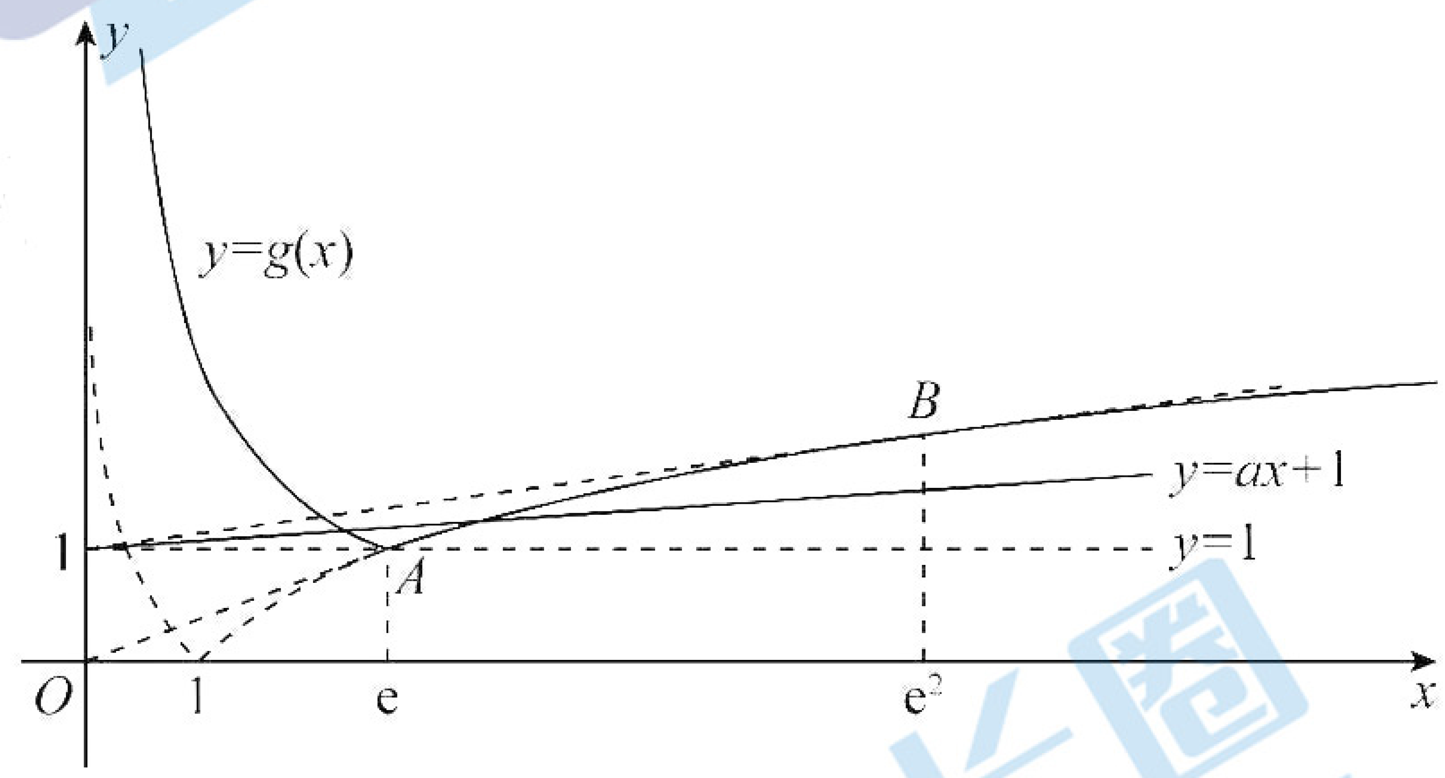
13. 0【解析】实际上,是将 $y=\cos x$ 图象上的所有点向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度,再把所有点的纵坐标伸长到原来的 2 倍(横坐标不变),得到函数 $y=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ 的图象,即 $f(x)=2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$,于是 $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=0$.

14. 97.7%【解析】因为 100 个数据 $x_1,x_2,x_3,\cdots,x_{100}$ 的平均值 $\overline{x}=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}x_i=72$,方差 $s^2=\frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100}(x_i-\overline{x})^2=\frac{1}{100}(\sum_{i=1}^{100}x_i^2-100\ \overline{x}^2)=\frac{1}{100}\times[100\times(72^2+36)-100\times72^2]=36$,所以 μ 的估计值为 $\mu=72$,σ 的估计值为 $\sigma=6$.设该市高中生的身体素质指标值为 X,由 $P(\mu-2\sigma\leqslant X\leqslant\mu+2\sigma)\approx0.954\ 5$,得 $P(72-12\leqslant X\leqslant72+12)=P(60\leqslant X\leqslant84)\approx0.954\ 5$,所以 $P(X\geqslant60)=P(60\leqslant X\leqslant84)+P(X>84)\approx0.954\ 5+\frac{1}{2}\times(1-0.954\ 5)=0.977\ 25\approx97.7\%$.

15. $-\frac{1}{5}$$\left(\text{填写区间}\left(-\frac{1}{4},0\right)\text{内的任一实数均得 5 分}\right)$

【解析】易知到直线 $x=-\frac{1}{4}$ 及点 $D\left(\frac{1}{4},0\right)$ 的距离都相等的点的轨迹为 $y^2=x$.由 $|y|=x-a$,得 $y=x-a(x\geqslant a)$ 或 $y=a-x(x\geqslant a)$.当射线 $y=x-a(x\geqslant a)$ 与抛物线 $y^2=x$ 相切时,由 $\begin{cases}y=x-a,\\y^2=x,\end{cases}$ 得 $y^2-y-a=0$,则由 $\Delta=1+4a=0$,解得 $a=-\frac{1}{4}$;当射线 $y=x-a(x\geqslant a)$ 过原点 O 时,$a=0$,所以当 $-\frac{1}{4}<a<0$ 时,射线 $y=x-a(x\geqslant a)$ 与抛物线 $y^2=x$ 有两个公共点(异于原点).此时,根据对称性,射线 $y=a-x(x\geqslant a)$ 与抛物线 $y^2=x$ 也有两个公共点.故满足题意的实数 a 的取值范围是 $\left(-\frac{1}{4},0\right)$.

16. 2 $(0,e^{-2})$【解析】$f(x)=\left|\frac{e}{x}+\ln x\right|+\left|\frac{e}{x}-\ln x\right|=2\max\left\{\frac{e}{x},|\ln x|\right\}$,由 $f(x)=2ax+2$,得 $\max\left\{\frac{e}{x},|\ln x|\right\}=ax+1$.设 $g(x)=\max\left\{\frac{e}{x},|\ln x|\right\}$,注意到曲线 $y=\frac{e}{x}$ 与曲线 $y=|\ln x|$ 恰好交于点 $A(e,1)$,显然,$g(x)=\begin{cases}\frac{e}{x},0<x\leqslant e,\\\ln x,x>e.\end{cases}$ $\left(\text{比较 }\frac{e}{x}\text{ 与 }|\ln x|\text{ 大小的推理见后附}\right)$,作出 $g(x)$ 的大致图象如图,可得 $g(x)$ 的最小值是 1,从而 $f(x)$ 的最小值是 2.设直线 $y=ax+1$ 与曲线 $y=\ln x(x>e)$ 切于点 $B(x_0,\ln x_0)$,则 $a=\frac{\ln x_0-1}{x_0-0}=\frac{1}{x_0}$,解得 $x_0=e^2$,从而 $a=e^{-2}$.由图象可知,若关于 x 的方程 $g(x)=ax+1$ 有 3 个实数解,则 $0<a<e^{-2}$,即所求实数 a 的取值范围是 $(0,e^{-2})$.



附:(1)当 $0<x\leqslant1$ 时,设 $h(x)=\frac{e}{x}-|\ln x|=\frac{e}{x}+\ln x$,则 $h'(x)=\frac{x-e}{x^2}<0$,所以 $h(x)$ 在区间 $(0,1]$ 上单调递减,从而 $h(x)>h(1)=e>0$,此时 $\frac{e}{x}>|\ln x|$;(2)当 $x>1$ 时,设 $m(x)=\frac{e}{x}-|\ln x|=\frac{e}{x}-\ln x$,显然 $m(x)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上单调递减,所以当 $1<x<e$ 时,$m(x)>m(e)=0$,即 $\frac{e}{x}>|\ln x|$;当 $x=e$ 时,$m(e)=0$,即 $\frac{e}{x}=|\ln x|$;当 $x>e$ 时,$m(x)<m(e)=0$,即 $\frac{e}{x}<|\ln x|$.

四、解答题

17. 解:(1)存在 a_3,a_4,a_5 成等差数列.下面说明:

当 $k=1$ 时,a_2,a_3,a_4 成公比为 2 的等比数列,

则 $a_3=2a_2=2\times2=4$,$a_4=2a_3=2\times4=8$,从而 $a_4-a_3=4$; (2 分)

当 $k=2$ 时,a_4,a_5,a_6 成公比为 $\frac{3}{2}$ 的等比数列,

则 $a_5=\frac{3}{2}a_4=\frac{3}{2}\times8=12$,从而 $a_5-a_4=4$, (4 分)

于是 $a_4-a_3=a_5-a_4$,故 a_3,a_4,a_5 成等差数列. (5 分)

注意:连续三项 $a_{2k+1},a_{2k+2},a_{2k+3}(k\in\mathbf{N})$ 成等差数列,故只需要找出这样的三项均符合题意.

(2)由题意,对任意的 $k\in\mathbf{N}^*$,得 $a_{2k+2}=\left(\frac{k+1}{k}\right)^2a_{2k}$,

即$\dfrac{a_{2k+2}}{a_{2k}}=\left(\dfrac{k+1}{k}\right)^2$.　(6分)

当$k\geqslant2$时,得$a_{2k}=a_2\cdot\dfrac{a_4}{a_2}\cdot\dfrac{a_6}{a_4}\cdot\dfrac{a_8}{a_6}\cdot\cdots\cdot\dfrac{a_{2k}}{a_{2(k-1)}}=2\cdot\left(\dfrac{2}{1}\right)^2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^2\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^2\cdot\cdots\cdot\left(\dfrac{k}{k-1}\right)^2=2k^2$;

当$k=1$时,$a_2=2$,适合上式,所以$a_{2k}=2k^2$,　(7分)

则$b_n=\dfrac{1}{2a_{2n}-1}=\dfrac{1}{4n^2-1}=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)$,　(9分)

所以$S_n=\dfrac{1}{2}\times\left(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2n-1}-\dfrac{1}{2n+1}\right)=\dfrac{n}{2n+1}$.　(10分)

18. **解**:(1)因为$a=2$,所以$b\sin A+\sqrt{3}a\cos B=\sqrt{3}c$.

由正弦定理,得$\sin B\sin A+\sqrt{3}\sin A\cos B=\sqrt{3}\sin C$.　(2分)

又$\sin C=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$,所以$\sqrt{3}\cos A\sin B=\sin A\sin B$.　(4分)

因为$0<B<\pi$,所以$\sin B>0$,所以$\sqrt{3}\cos A=\sin A$,即$\tan A=\sqrt{3}$.

又$0<A<\pi$,所以$A=\dfrac{\pi}{3}$.　(6分)

(2)**法一**:由题意,得$\dfrac{1}{2}b\times AD\sin\angle CAD+\dfrac{1}{2}c\times AD\sin\angle BAD=\dfrac{1}{2}bc\sin\angle BAC$,

结合$\angle BAC=\dfrac{\pi}{3}$,$\angle BAD=\angle CAD=\dfrac{\pi}{6}$,解得$AD=\dfrac{\sqrt{3}bc}{b+c}$.　(8分)

在$\triangle ABC$中,由正弦定理,得$\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin\angle BAC}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$,

则$b=\dfrac{4\sin B}{\sqrt{3}}$,$c=\dfrac{4\sin C}{\sqrt{3}}$.　(10分)

从而$AD=\dfrac{\sqrt{3}bc}{b+c}=\dfrac{4\sin B\sin C}{\sin B+\sin C}=\dfrac{4\sin\frac{7\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{7\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}}=\dfrac{4\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.　(12分)

法二:由题意,得$\angle BAD=\angle CAD=\dfrac{\pi}{6}$.又$C=\dfrac{\pi}{12}$,所以$B=\dfrac{7\pi}{12}$.

在$\triangle ABD$中,由正弦定理,得$\dfrac{AD}{\sin B}=\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}$,

则$BD=\dfrac{AD\sin\angle BAD}{\sin B}=\dfrac{AD\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{7\pi}{12}}=\dfrac{AD}{2\sin\frac{7\pi}{12}}$.　(8分)

在$\triangle ACD$中,由正弦定理,得$\dfrac{AD}{\sin C}=\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}$,

则$CD=\dfrac{AD\sin\angle CAD}{\sin C}=\dfrac{AD}{2\sin\frac{\pi}{12}}$.　(10分)

由$BD+CD=2$,得$\dfrac{AD}{2\sin\frac{7\pi}{12}}+\dfrac{AD}{2\sin\frac{\pi}{12}}=2$,

解得$AD=\dfrac{4\sin\frac{7\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}}{\sin\frac{7\pi}{12}+\sin\frac{\pi}{12}}=\dfrac{4\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\times\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$.　(12分)

19. (1)**证明**:**法一**:如图,取AD的中点G,连接GE,GF,

由D是AA_1的中点,得$A_1G=3GA$.

因为$A_1F=3FB$,所以$\dfrac{A_1G}{GA}=\dfrac{A_1F}{FB}=3$,

从而$GF/\!/AB$.　(1分)

又$GF\not\subset$平面ABC,$AB\subset$平面ABC,

所以$GF/\!/$平面ABC.　(2分)

因为G,E分别为AD,CD的中点,

所以$GE/\!/AC$.

又$GE\not\subset$平面ABC,$AC\subset$平面ABC,

所以$GE/\!/$平面ABC.　(4分)

又$GE\cap GF=G$,GE,$GF\subset$平面GEF,

所以平面$GEF/\!/$平面ABC.

因为$EF\subset$平面GEF,所以$EF/\!/$平面ABC.　(5分)

法二:由D是AA_1的中点,E是CD的中点,得

$\overrightarrow{DE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC})=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AC}\right)=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{A_1A}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$;　(2分)

由点F在A_1B上,且$A_1F=3FB$,得

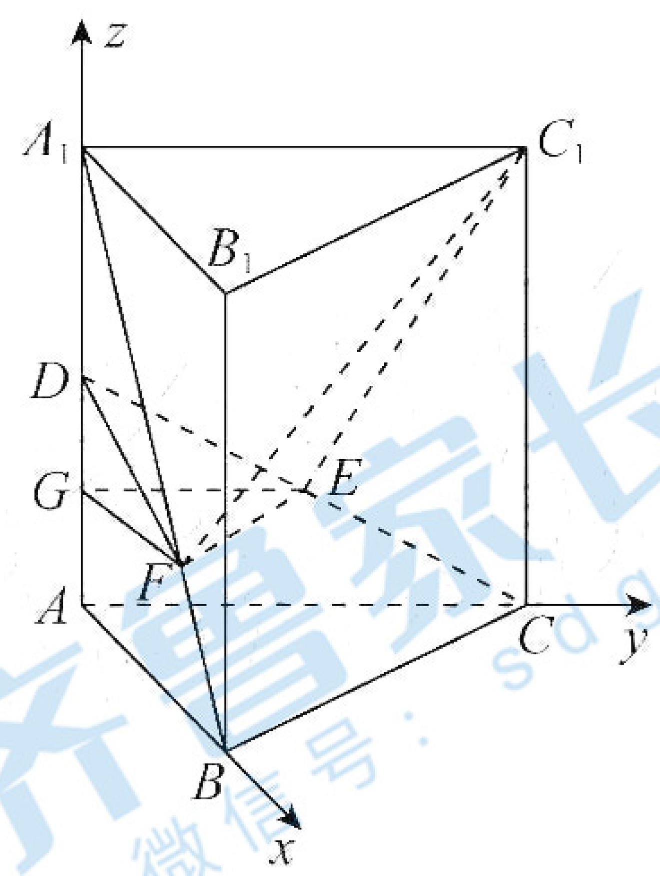
$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{A_1F}-\overrightarrow{A_1D}=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{A_1B}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{A_1A}=\dfrac{3}{4}(\overrightarrow{A_1A}+\overrightarrow{AB})-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{A_1A}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{A_1A}+\dfrac{3}{4}\overrightarrow{AB}$,　(4分)

所以 $\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{DF}-\overrightarrow{DE}=\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{A_1A}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right)-\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{A_1A}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$，

所以向量$\overrightarrow{EF}$，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$共面.

又 $EF\not\subset$平面 ABC，AB，$BC\subset$平面 ABC，

所以 $EF/\!/$平面 ABC.　　(5分)



注意：若以 A 为坐标原点，分别以 AC，AA_1 所在直线为 y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，不给分.

(2)**解**：如图，以 A 为坐标原点，$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{AA_1}$ 的方向分别为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向，建立空间直角坐标系，则 $D\left(0,0,\frac{1}{2}\right)$，$E\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$，$F\left(\frac{3}{4},0,\frac{1}{4}\right)$，$C_1(0,1,1)$，　　(6分)

从而$\overrightarrow{DE}=\left(0,\frac{1}{2},-\frac{1}{4}\right)$，$\overrightarrow{EF}=\left(\frac{3}{4},-\frac{1}{2},0\right)$，

$\overrightarrow{C_1E}=\left(0,-\frac{1}{2},-\frac{3}{4}\right)$.　　(7分)

设平面 DEF 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{DE}=0,\\ \boldsymbol{m}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\frac{1}{2}y-\frac{1}{4}z=0,\\ \frac{3}{4}x-\frac{1}{2}y=0,\end{cases}$

取 $x=2$，则 $y=3$，$z=6$，得平面 DEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{m}=(2,3,6)$；　　(9分)

设平面 EFC_1 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(a,b,c)$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{EF}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_1E}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}\frac{3}{4}a-\frac{1}{2}b=0,\\ -\frac{1}{2}b-\frac{3}{4}c=0,\end{cases}$

取 $a=2$，则 $b=3$，$c=-2$，得平面 EFC_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(2,3,-2)$，　　(11分)

则 $\cos\langle\boldsymbol{m},\boldsymbol{n}\rangle=\frac{\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{m}||\boldsymbol{n}|}=\frac{1}{7\times\sqrt{17}}=\frac{\sqrt{17}}{119}$，

故平面 DEF 与平面 EFC_1 夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{17}}{119}$.

(12分)

20. **解**：(1)由题意知，Y 的所有可能取值为 0，1，2，　(1分)

则 $P(Y=0)=\frac{C_2^2}{C_{10}^2}=\frac{1}{45}$，

$P(Y=1)=\frac{C_2^1C_8^1}{C_{10}^2}=\frac{16}{45}$，

$P(Y=2)=\frac{C_8^2}{C_{10}^2}=\frac{28}{45}$，　　(4分)

所以 Y 的分布列为

Y	0	1	2
P	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

(5分)

(2)由题意，$P(X=k)=C_{10}^kp^k(1-p)^{10-k}$.　　(6分)

由$\begin{cases}P(X=k)\geqslant P(X=k-1),\\ P(X=k)\geqslant P(X=k+1),\end{cases}$

得$\begin{cases}C_{10}^kp^k(1-p)^{10-k}\geqslant C_{10}^{k-1}p^{k-1}(1-p)^{11-k},\\ C_{10}^kp^k(1-p)^{10-k}\geqslant C_{10}^{k+1}p^{k+1}(1-p)^{9-k},\end{cases}$　　(8分)

解得 $11p-1\leqslant k\leqslant 11p$.

因为 A 为双元素集合，且 $11p-(11p-1)=1$，

所以 $A=\{11p-1,11p\}$.　　(10分)

因为 $0.75<p<0.85$，所以 $8.25<11p<9.35$.

因为 $11p$ 为正整数，所以 $11p=9$，即 $p=\frac{9}{11}$.

由题意，$X\sim B(10,p)$，因此 $E(X)=10p=\frac{90}{11}$.

(12分)

21. (1)**解**：设 C 的焦距为 $2c$，则 $2c=4$，即 $c=2$，$F_1(-2,0)$，$F_2(2,0)$.　　(1分)

由双曲线的定义，得 $2a=|PF_1|-|PF_2|=\sqrt{(3+2)^2+(\sqrt{2})^2}-\sqrt{(3-2)^2+(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{3}$，

即 $a=\sqrt{3}$，

所以 $b=\sqrt{c^2-a^2}=1$.

故 C 的方程为$\frac{x^2}{3}-y^2=1$.　　(4分)

(2)**证明**：设 $A(s,0)$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，直线 l 的方程为 $x=ty+s(t\neq0)$.

联立$\begin{cases}x=ty+s,\\ x^2-3y^2=3,\end{cases}$整理得$(t^2-3)y^2+2sty+s^2-3=0$，

(5分)

由题意，得$\begin{cases}t^2-3\neq0,\\ \Delta=4s^2t^2-4(t^2-3)(s^2-3)>0,\end{cases}$即$\begin{cases}t^2\neq3,\\ s^2+t^2>3,\end{cases}$

则 $y_1+y_2=\frac{-2st}{t^2-3}$，$y_1y_2=\frac{s^2-3}{t^2-3}$，　　(6分)

$|AM|\cdot|AN|=|\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AN}|=|(x_1-s)(x_2-s)+y_1y_2|=|ty_1\cdot ty_2+y_1y_2|=|(t^2+1)y_1y_2|=\left|\dfrac{(s^2-3)(t^2+1)}{t^2-3}\right|$.　　(7分)

设 MN 的中点为 $G(x_0,y_0)$，则 $y_0=\dfrac{y_1+y_2}{2}=\dfrac{-st}{t^2-3}$，

$x_0=ty_0+s=t\cdot\dfrac{-st}{t^2-3}+s=\dfrac{-3s}{t^2-3}$，　　(8分)

所以线段 MN 的垂直平分线的方程为 $y+\dfrac{st}{t^2-3}=-t\left(x+\dfrac{3s}{t^2-3}\right)$.

令 $y=0$，得 $x=\dfrac{-4s}{t^2-3}$，即 $D\left(\dfrac{-4s}{t^2-3},0\right)$，

所以 $|AD|=\left|\dfrac{-4s}{t^2-3}-s\right|=\left|\dfrac{s(t^2+1)}{t^2-3}\right|$.　　(9分)

由题意，得 $\left|\dfrac{(s^2-3)(t^2+1)}{t^2-3}\right|=2\left|\dfrac{s(t^2+1)}{t^2-3}\right|$，

即 $|s^2-3|=2|s|$，　　(10分)

从而 $s^2-3=\pm 2s$.

当 $s^2-3=2s$，即 $s^2-2s-3=0$ 时，解得 $s=-1$ 或 $s=3$；

当 $s^2-3=-2s$，即 $s^2+2s-3=0$ 时，解得 $s=-3$ 或 $s=1$，　　(11分)

所以直线 l 的方程为 $x=ty-3$，或 $x=ty-1$，或 $x=ty+1$，或 $x=ty+3$.

故直线 l 过四个定点 $(-3,0)$，$(-1,0)$，$(1,0)$，$(3,0)$ 中的一个.　　(12分)

22. **证明：**(1)设 $g(x)=\ln x-\dfrac{2(x-1)}{x+1}(x>0)$，

则 $g'(x)=\dfrac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\geqslant 0$，　　(1分)

所以 $g(x)$ 是增函数，且 $g(1)=0$，　　(2分)

当 $0<x\leqslant 1$ 时，$g(x)\leqslant g(1)=0$，即 $\ln x\leqslant\dfrac{2(x-1)}{x+1}$；

当 $x>1$ 时，$g(x)>g(1)=0$，即 $\ln x>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$.

综上，当 $0<x\leqslant 1$ 时，$f(x)\leqslant\dfrac{2(x-1)}{x+1}$；当 $x>1$ 时，$f(x)>\dfrac{2(x-1)}{x+1}$.　　(4分)

(2)(ⅰ)由题意，得 $\ln x_1=m-\dfrac{a}{x_1}$，$\ln x_2=m-\dfrac{a}{x_2}$，则 $a+x_1\ln x_1-mx_1=0$，$a+x_2\ln x_2-mx_2=0$.

令 $h(x)=a+x\ln x-mx$，则 $h(x_1)=h(x_2)=0$，$h'(x)=\ln x+1-m$.　　(5分)

因为 $h'(x)>0\Leftrightarrow x>e^{m-1}$，$h'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<e^{m-1}$，

所以函数 $h(x)$ 在区间 $(0,e^{m-1})$ 上单调递减，在区间 $(e^{m-1},+\infty)$ 上单调递增，

所以 $x=e^{m-1}$ 是 $h(x)$ 的极小值点，也是最小值点，且 $h(e^{m-1})=a-e^{m-1}$.

$h(x)$ 要有两个不同的零点，首先必须 $h(e^{m-1})=a-e^{m-1}<0$，即 $a<e^{m-1}$，　　(6分)

而当 $x\to 0$ 时，$h(x)\to a$，所以 $a>0$，则当 $0<a<e^{m-1}$ 时，$h(x)$ 在区间 $(0,e^{m-1})$ 内有一个零点 x_1；

又 $h(e^m)=a>0$，则 $h(x)$ 在区间 (e^{m-1},e^m) 内又有一个零点 x_2.

综上，若关于 x 的方程 $f(x)=m-\dfrac{a}{x}$ 有两解 x_1，$x_2(0<x_1<x_2)$，则 $0<a<e^{m-1}$.　　(7分)

(ⅱ)显然 $0<x_1<e^{m-1}<x_2$，

由 $a+x_1\ln x_1-mx_1=0$，得 $-\dfrac{a}{x_1}=\ln x_1-m$，

即 $1-\dfrac{a}{x_1}=\ln x_1-(m-1)$，即 $1-\dfrac{a}{x_1}=\ln\dfrac{x_1}{e^{m-1}}$.

因为 $0<\dfrac{x_1}{e^{m-1}}<1$，所以由(1)，得 $1-\dfrac{a}{x_1}=\ln\dfrac{x_1}{e^{m-1}}<\dfrac{2\left(\dfrac{x_1}{e^{m-1}}-1\right)}{\dfrac{x_1}{e^{m-1}}+1}=\dfrac{2(x_1-e^{m-1})}{x_1+e^{m-1}}$，　　(9分)

即 $1-\dfrac{a}{x_1}<\dfrac{2(x_1-e^{m-1})}{x_1+e^{m-1}}$，

整理，得 $x_1^2+(a-3e^{m-1})x_1+ae^{m-1}>0$　①.

因为 $\dfrac{x_2}{e^{m-1}}>1$，所以同理可得 $x_2^2+(a-3e^{m-1})x_2+ae^{m-1}<0$　②.　　(10分)

由①②，同构函数 $p(x)=x^2+(a-3e^{m-1})x+ae^{m-1}$，

则 $p(x_1)>0$，$p(x_2)<0$.

因为 $\Delta=(a-3e^{m-1})^2-4ae^{m-1}=a^2-10ae^{m-1}+9e^{2(m-1)}=(a-e^{m-1})(a-9e^{m-1})>0$，$ae^{m-1}>0$，$-\dfrac{a-3e^{m-1}}{2}>0$，

所以方程 $p(x)=0$ 有两个不等正实根.

设 $p(x_3)=p(x_4)=0$，且 $0<x_3<x_4$，

则有 $0<x_1<x_3$，$0<x_2<x_4$，　　(11分)

所以 $x_1+x_2<x_3+x_4=3e^{m-1}-a$，

即 $x_1+x_2+a<3e^{m-1}$.　　(12分)