

绝密★启用前

试卷类型：A

深圳市 2019 年高三年级第二次调研考试

数 学（理科）

2019. 4

本试卷共 6 页，23 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：

1. 答卷前，考生务必用黑色字迹的签字笔在答题卡指定位置填写自己的学校、姓名和考生号，并将条形码正向准确粘贴在答题卡的贴条形码区，请保持条形码整洁、不污损。
2. 选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答案涂在答题卡相应的位置上。
3. 非选择题必须用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。
4. 作答选做题时，请先用 2B 铅笔填涂选做题的题号对应的信息点，再做答。
5. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将答题卡交回。

第 I 卷

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $M = \{x | x > 0\}$ ， $N = \{x | x^2 - 4 \geq 0\}$ ，则 $M \cup N =$
(A) $(-\infty, -2] \cup (0, +\infty)$ (B) $(-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$ (C) $[2, +\infty)$ (D) $(0, +\infty)$
2. 在复平面内，复数 $z = \frac{i(1+i)}{1-2i}$ 所对应的点位于
(A) 第一象限 (B) 第二象限 (C) 第三象限 (D) 第四象限
3. 2019 年是新中国成立 70 周年，也是全面建成小康社会的关键之年。为喜迎祖国 70 周年生日，全民齐心协力建设小康社会，某校特举办“喜迎国庆，共建小康”知识竞赛活动。下面的茎叶图是参赛两组选手的答题得分情况，则下列说法正确的是

深圳市 2019 年高三年级第二次调研考试 数学（理科）试题 第 1 页 共 6 页

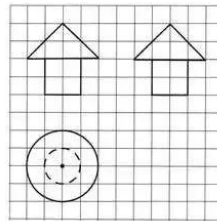
- (A) 甲组选手得分的平均数小于乙组选手得分的平均数
 (B) 甲组选手得分的中位数大于乙组选手得分的平均数
 (C) 甲组选手得分的中位数等于乙组选手得分的中位数
 (D) 甲组选手得分的方差大于乙组选手得分的方差

甲	乙
5	7
7 3 2	8 3 4 5
3	9 1

(第3题图)

4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{2}$, 且 $a_2 \cdot a_4 = 4(a_3 - 1)$, 则 $a_5 =$
 (A) 8 (B) 16 (C) 32 (D) 64
5. 已知函数 $f(x) = ax^2 + (1-a)x + \frac{2}{x}$ 是奇函数, 则曲线 $y = f(x)$ 在 $x=1$ 处的切线的倾角为
 (A) $\frac{\pi}{4}$ (B) $\frac{3\pi}{4}$ (C) $\frac{\pi}{3}$ (D) $\frac{2\pi}{3}$
6. 在平行四边形 $ABCD$ 中, E 为 CD 的中点, F 为 AE 的中点. 设 $\overrightarrow{AB} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{b}$, 则 $\overrightarrow{FB} =$
 (A) $-\frac{3}{4}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$ (B) $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{3}{4}\mathbf{b}$ (C) $\frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{3}{4}\mathbf{b}$ (D) $\frac{3}{4}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$

7. 如图所示, 网格纸上小正方形的边长为1, 粗实线和粗虚线画出的是某几何体的三视图, 则该几何体的表面积为

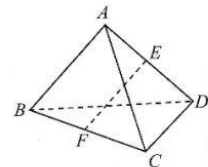


(第7题图)

- (A) $(8 + 4\sqrt{2})\pi$
 (B) $(9 + 4\sqrt{2})\pi$
 (C) $(8 + 8\sqrt{2})\pi$
 (D) $(9 + 8\sqrt{2})\pi$
8. 十九世纪末, 法国学者贝特朗在研究几何概型时提出了“贝特朗悖论”, 即“在一个圆内任意选一条弦, 这条弦的弦长长于这个圆的内接等边三角形边长的概率是多少?” 贝特朗用“随机半径”、“随机端点”、“随机中点”三种方法求解, 所得结果均不相同. 该悖论的矛头直指概率概念本身, 这极大地促进了概率论基础的严格化. 已知“随机端点”的方法如下: 设 A 为圆 O 上一个定点, 在圆周上随机取一点 B , 连结 AB , 求所得弦长 AB 大于圆 O 的内接等边三角形边长的概率. 记该概率为 p , 则 $p =$
 (A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$

深圳市2019年高三年级第二次调研考试 数学(理科)试题 第2页 共7页

9. 已知函数 $f(x) = \frac{a}{x} + \ln x - 1$ 有且仅有一个零点, 则实数 a 的取值范围为
 (A) $(-\infty, 0] \cup \{1\}$ (B) $[0, 1]$ (C) $(-\infty, 0] \cup \{2\}$ (D) $[0, 2]$
10. 设点 F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的左、右焦点, 点 A, B 分别为椭圆 C 的右顶点和下顶点, 且点 F_1 关于直线 AB 的对称点为 M . 若 $MF_2 \perp F_1F_2$, 则椭圆 C 的离心率为
 (A) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ (B) $\frac{\sqrt{3}-1}{3}$ (C) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
11. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x$ ($\omega > 0$) 在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ 上恰有一个最大值点和一个最小值点, 则实数 ω 的取值范围为
 (A) $[\frac{8}{3}, 7)$ (B) $[\frac{8}{3}, 4)$ (C) $[4, \frac{20}{3})$ (D) $(\frac{20}{3}, 7)$
12. 如图, 在四面体 $ABCD$ 中, $AB = CD = 2, AC = BD = \sqrt{3}, AD = BC = \sqrt{5}$, E, F 分别是 AD, BC 的中点. 若用一个与直线 EF 垂直, 且与四面体的每个面都相交的平面 α 去截该四面体, 由此得到一个多边形截面, 则该多边形截面面积的最大值为
 (A) $\sqrt{6}$ (B) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ (C) $\frac{5}{2}$ (D) $\frac{5}{4}$



(第 12 题图)

第 II 卷

本卷包括必考题和选考题两部分. 第 (13) 题~第 (21) 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 (22) 题~第 (23) 题为选考题, 考生根据要求作答.

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分.

13. 设实数 x, y 满足 $\begin{cases} 2 \leq x \leq 3, \\ 1 \leq y \leq 2, \\ x + y \leq 4, \end{cases}$ 则 $\frac{y}{x-1}$ 的最大值为_____.

14. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, 且圆 $E: (x-2)^2 + y^2 = 1$ 的圆心是双曲线 C 的右焦点, 若圆 E 与双曲线 C 的渐近线相切, 则双曲线 C 的方程是_____.
15. 精准扶贫是全面建成小康社会、实现中华民族伟大复兴“中国梦”的重要保障. 某单位拟组成 4 男 3 女共 7 人的扶贫工作队, 派驻到 3 个贫困地区 A 、 B 、 C 进行精准扶贫工作. 若每个地区至少派驻 1 男 1 女两位工作人员, 且男性甲必须派驻到 A 地区, 则不同的派驻方式有_____种.
16. 设 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 且 $a_1 = 3$, 当 $n \geq 2$ 时, 有 $S_n + S_{n-1} - 2S_n S_{n-1} = 2na_n$. 则使得 $S_1 S_2 \cdots S_m \geq 2019$ 成立的正整数 m 的最小值为_____.

三、解答题: 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

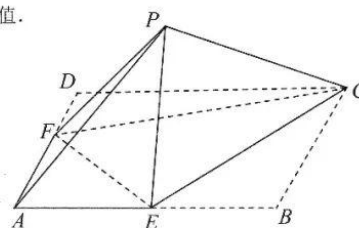
已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{2}BC$, $AC = 2\sqrt{5}$, 点 D 在边 AC 上, 且 $AD = 2CD$, $\angle ABD = 2\angle CBD$.

- (1) 求 $\angle ABC$ 的大小;
- (2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

18. (本小题满分 12 分)

在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 中, 点 E 、 F 分别为边 AB 、 AD 的中点, 以 CE 、 CF 为折痕将 $\triangle DFC$ 和 $\triangle BCE$ 折起, 使点 B 、 D 重合于点 P , 连结 PA , 得到如图所示的四棱锥 $P-AECF$.

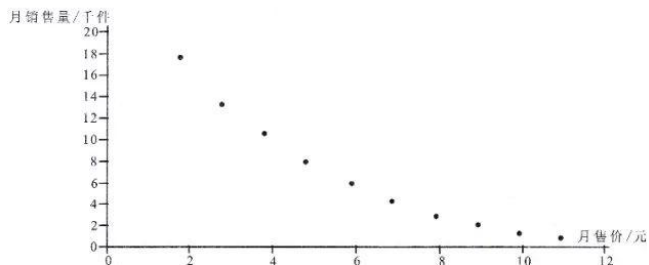
- (1) 求证: $EF \perp PC$;
- (2) 求直线 PA 与平面 PEC 所成角的正弦值.



(第 18 题图)

19. (本小题满分 12 分)

某网店销售某种商品, 为了解该商品的月销量 y (单位: 千件) 与月售价 x (单位: 元/件) 之间的关系, 对近几年的月销售量 y_i 和月销售价 x_i ($i=1, 2, 3, \dots, 10$) 数据进行了统计分析, 得到了下面的散点图:



(1) 根据散点图判断, $y = c + d \ln x$ 与 $y = bx + a$ 哪一个更适宜作为月销量 y 关于月销售价 x 的回归方程类型? (给出判断即可, 不需说明理由), 并根据判断结果及表中数据, 建立 y 关于 x 的回归方程;

(2) 利用 (1) 中的结果回答问题: 已知该商品的月销售额为 z (单位: 千元), 当月销售量为何值时, 商品的月销售额预报值最大? (月销售额=月销售量 \times 当月售价)

参考公式、参考数据及说明:

①对一组数据 $(v_1, w_1), (v_2, w_2), \dots, (v_n, w_n)$, 其回归直线 $w = \alpha + \beta v$ 的斜率和截距的

$$\text{最小二乘法估计分别为 } \hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (w_i - \bar{w})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2}, \quad \hat{\alpha} = \bar{w} - \hat{\beta} \bar{v}.$$

②参考数据:

\bar{x}	\bar{y}	\bar{u}	$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2$	$\sum_{i=1}^{10} (u_i - \bar{u})^2$	$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$	$\sum_{i=1}^{10} (u_i - \bar{u})(y_i - \bar{y})$
6.50	6.60	1.75	82.50	2.70	-143.25	-27.54

表中 $u_i = \ln x_i$, $\bar{u} = \frac{1}{10} \sum_{i=1}^{10} u_i$.

③计算时, 所有的小数都精确到 0.01, 如 $\ln 4.06 \approx 1.40$.

20. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C: x^2 = 4y$, 过点 $(2, 3)$ 的直线 l 交 C 于 A, B 两点, 抛物线 C 在点 A, B 处的切线交于点 P .

- (1) 当点 A 的横坐标为 4 时, 求点 P 的坐标;
- (2) 若 Q 是抛物线 C 上的动点, 当 $|PQ|$ 取最小值时, 求点 Q 的坐标及直线 l 的方程.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - ae^{-x} - (a+1)x$ ($a \in \mathbf{R}$). (其中常数 $e=2.71828\dots$, 是自然对数的底数).

- (1) 求函数 $f(x)$ 的极值点;
- (2) 若对于任意 $0 < a < 1$, 关于 x 的不等式 $[f(x)]^2 < \lambda(e^{a-1} - a)$ 在区间 $(a-1, +\infty)$ 上存在实数解, 求实数 λ 的取值范围.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 \cos \alpha, \\ y = \sin \alpha, \end{cases}$ (α 为参数), 圆 C_2

的方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 4$, 以原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 射线 l 的极坐标方程为 $\theta = \theta_0$ ($\rho \geq 0$).

- (1) 求曲线 C_1 和圆 C_2 的极坐标方程;
- (2) 当 $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ 时, 射线 l 与曲线 C_1 和圆 C_2 分别交于异于点 O 的 M, N 两点, 若 $|ON| = 2|OM|$, 求 $\triangle MC_2N$ 的面积.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x-m| + |x + \frac{1}{m}|$ ($m > 1$).

- (1) 当 $m = 2$ 时, 求不等式 $f(x) > 3$ 的解集;
- (2) 证明: $f(x) + \frac{1}{m(m-1)} \geq 3$.

深圳市 2019 年高三年级第二次调研考试 数学 (理科) 试题 第 6 页 共 6 页

2019年深圳市高三第二次调研考试
理科数学试题答案及评分参考

第 I 卷

一. 选择题

- 1.A 2.C 3.D 4.A 5.B 6.D
7.A 8.C 9.A 10.C 11.B 12.B

二. 填空题:

13. 2 14. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$ 15. 72 16. 1009

11. 解析: $f(x) = \sqrt{3} \sin \omega x + \cos \omega x = 2 \sin(\omega x + \frac{\pi}{6})$, $x \in R$, 令 $t = \omega x + \frac{\pi}{6}$, $f(x) = 2 \sin t$.

若函数 $f(x)$ 恰有一个最大值点和一个最小值点在区间 $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}]$ 上,

也即函数 $y = 2 \sin t$ 恰有一个最大值点和一个最小值点在区间 $[-\frac{\pi}{4}\omega + \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{6}]$ 上,

$$\therefore \begin{cases} -\frac{3\pi}{2} < -\frac{\pi}{4}\omega + \frac{\pi}{6} \leq -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{3}\omega + \frac{\pi}{6} < \frac{3\pi}{2}, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} \frac{8}{3} \leq \omega < \frac{20}{3}, \\ 1 \leq \omega < 4, \end{cases} \text{ 即 } \frac{8}{3} \leq \omega < 4,$$

$\therefore \omega$ 的取值范围为 $[\frac{8}{3}, 4)$, 故应选 B.

12. 解析: (法一) 补成长, 宽, 高分别为 $\sqrt{3}, \sqrt{2}, 1$ 的长方体(如下图),

由于 $EF \perp \alpha$, 故截面为平行四边形 $MNKL$, 可得 $KL + KN = \sqrt{5}$,

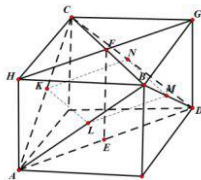
设异面直线 BC 与 AD 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = \sin \angle HFB = \sin \angle LKN$,

$$\text{算得 } \sin \theta = \frac{2\sqrt{6}}{5},$$

$$\therefore S_{\text{四边形}MNKL} = NK \cdot KL \cdot \sin \angle NKL$$

$$\leq \frac{2\sqrt{6}}{5} \left(\frac{NK + KL}{2} \right)^2 = \frac{\sqrt{6}}{2},$$

当且仅当 $NK = KL$ 时取等号, 故应选 B.



$$\begin{aligned} \text{(法二)} \quad \overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{AD} &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FD}) \cdot \overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD}) \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= \frac{1}{4}[(\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AD})] = 0 \end{aligned}$$

$\therefore EF \perp AD$, 同理可得 $EF \perp BC$,

设异面直线 BC 与 AD 所成的角为 θ , 则 $\sin \theta = \sin \angle HFB = \sin \angle LKN$,

$$\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = -3 + 2 = -1,$$

$$\therefore \cos \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD} \rangle = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = -\frac{1}{5},$$

$$\therefore \sin \langle \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD} \rangle = \sin \theta = \frac{2\sqrt{6}}{5}, \quad \text{即 } \sin \angle NKL = \frac{2\sqrt{6}}{5},$$

$$\text{同法一可得 } S_{\text{四边形}MNKL} = NK \cdot KL \cdot \sin \angle NKL \leq \frac{\sqrt{6}}{2},$$

当且仅当 $NK = KL$ 时取等号, 故应选 B.

16 解析: $\because S_n + S_{n-1} - 2S_n S_{n-1} = 2na_n,$

$$\therefore S_n + S_{n-1} - 2S_n S_{n-1} = 2n(S_n - S_{n-1}),$$

$$\therefore 2S_n S_{n-1} = (2n+1)S_{n-1} - (2n-1)S_n,$$

$$\therefore \frac{2n+1}{S_n} - \frac{2n-1}{S_{n-1}} = 2,$$

$$\text{令 } b_n = \frac{2n+1}{S_n}, \text{ 则 } b_n - b_{n-1} = 2 \quad (n \geq 2),$$

$$\therefore \text{数列 } \{b_n\} \text{ 是以 } b_1 = \frac{3}{S_1} = \frac{3}{a_1} = 1 \text{ 为首项, 公差 } d = 2 \text{ 的等差数列,}$$

$$\therefore b_n = 2n-1, \text{ 即 } \frac{2n+1}{S_n} = 2n-1, \therefore S_n = \frac{2n+1}{2n-1},$$

$$\therefore S_1 S_2 \cdots S_m = 3 \times \frac{5}{3} \times \cdots \times \frac{2m+1}{2m-1} = 2m+1.$$

由 $2m+1 \geq 2019$, 解得 $m \geq 1009$, 即正整数 m 的最小值为 1009, 故应填 1009.

三、解答题: 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分12分)

已知 $\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{2}BC$, $AC = 2\sqrt{5}$, 点 D 在边 AC 上, 且 $AD = 2CD$, $\angle ABD = 2\angle CBD$.

(1) 求 $\angle ABC$ 的大小;

(2) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

解: (1) (法一) 依题意设 $\angle ABD = 2\angle CBD = 2\theta$,

$$\because AD = 2CD, AC = 2\sqrt{5},$$

$$\therefore AD = \frac{4\sqrt{5}}{3}, CD = \frac{2\sqrt{5}}{3}, \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

在 $\triangle BAD$ 中, 由正弦定理, 可得 $\frac{AB}{\sin \angle ADB} = \frac{AD}{\sin \angle ABD}$,

$$\therefore \sin \angle ADB = \frac{AB \sin \angle ABD}{AD} = \frac{3AB \sin 2\theta}{4\sqrt{5}}, \dots\dots\dots 4 \text{分}$$

同理, 在 $\triangle BCD$ 中, 由正弦定理, 可得

$$\sin \angle BDC = \frac{BC \sin \angle CBD}{CD} = \frac{3BC \sin \theta}{2\sqrt{5}}, \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

$$\because \angle BDC + \angle BDA = \pi, \therefore \sin \angle BDC = \sin \angle BDA,$$

$$\therefore \frac{3AB \sin 2\theta}{4\sqrt{5}} = \frac{3BC \sin \theta}{2\sqrt{5}},$$

$$\because AB = \sqrt{2}BC, \therefore \sqrt{2} \sin \theta \cos \theta = \sin \theta,$$

$$\because 0 < \theta < \pi, \therefore \sin \theta > 0, \therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \therefore \theta = \frac{\pi}{4},$$

$$\therefore \angle ABC = 3\theta = \frac{3\pi}{4}. \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

(2) 在 $\triangle ABC$ 中, 由余弦定理, 得 $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos 3\theta$,

$$\therefore (2\sqrt{5})^2 = (\sqrt{2}BC)^2 + BC^2 - 2\sqrt{2}BC \cdot BC \cos \frac{3\pi}{4},$$

解得 $BC = 2$, $\dots\dots\dots 10 \text{分}$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin 3\theta = \frac{1}{2} \sqrt{2} BC^2 \sin \frac{3\pi}{4} = 2. \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

(法二) $\because AD = 2CD, \therefore \frac{S_{\triangle BDC}}{S_{\triangle BDA}} = \frac{CD}{AD} = \frac{1}{2}, \dots\dots\dots 2 \text{分}$

$$\because S_{\triangle BDC} = \frac{1}{2} BC \cdot BD \cdot \sin \theta, S_{\triangle BDA} = \frac{1}{2} AB \cdot BD \cdot \sin 2\theta, \text{ 且 } AB = \sqrt{2}BC,$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ 即 } \theta = \frac{\pi}{4},$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ABD + \angle CBD = 3\theta = \frac{3\pi}{4}, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

(以下同法一)

【说明】本题主要考察正弦定理，余弦定理，二倍角公式及三角形面积计算公式等知识，意在考察考生数形结合、转化与化归思想，考察了学生的逻辑推理，数学运算等核心素养。

18. (本小题满分 12 分)

在边长为 4 的正方形 $ABCD$ 中，点 E 、 F 分别为边 AB 、 AD 的中点，以 CE 、 CF 为折痕将 $\triangle DFC$ 和 $\triangle BCE$ 折起，使点 B 、 D 重合于点 P ，连结 PA ，得到如图所示的四棱锥 $P-AECF$ 。

(1) 求证： $EF \perp PC$ ；

(2) 求直线 PA 与平面 PEC 所成角的正弦值。

解析：(1) (法一) 证明：连结 EF ，

记 AC 与 EF 的交点为 O ，

在正方形 $ABCD$ 中， $AB \perp BC$ ， $AD \perp CD$ ，

翻折后 $PC \perp PE$ ， $PC \perp PF$ ， $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

又 $\because PE \cap PF = P$ ， $\therefore PC \perp$ 平面 PEF ， $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$\because EF \subset$ 平面 PEF ， $\therefore EF \perp PC$ ； $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(法二) 证明：连结 EF ，记 AC 与 EF 的交点为 O ，

在正方形 $ABCD$ 中， $AC \perp EF$ ， $BE = DF$ ，

O 为 EF 的中点，翻折后， $PE = PF$ ， $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$\because O$ 是 EF 的中点， $\therefore EF \perp PO$ ，

而 $AC \perp EF$ ， PO 与 AC 相交于 O 点， $\therefore EF \perp$ 平面 PAC ， $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

又 $\because PC \subset$ 平面 PAC ， $\therefore EF \perp PC$ ； $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

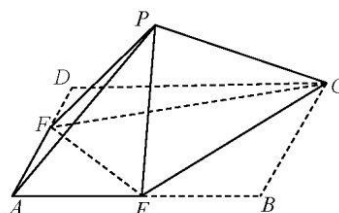
(2) (法一) 由 (1) 可知 $\triangle OPC$ 为直角三角形， $OP = \sqrt{2}$ ， $PC = 4$ ， $OC = 3\sqrt{2}$ ，

设 P 到 AC 的距离为 h ， $\because \sqrt{2} \cdot 4 = 3\sqrt{2} \cdot h$ ， $\therefore h = \frac{4}{3}$ ， $\dots\dots\dots 7 \text{ 分}$

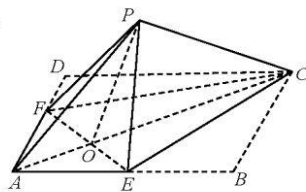
$$\therefore V_{P-ABC} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot h = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 2 \times 4 \times \frac{4}{3} = \frac{16}{9},$$

$$S_{\triangle PCE} = \frac{1}{2} \cdot PC \cdot PE = 4, \text{ 设点 } A \text{ 到平面 } PCE \text{ 的距离为 } h',$$

$$\therefore V_{A-PCE} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle PCE} \cdot h' = \frac{4}{3} \cdot h', \therefore \frac{4}{3} h' = \frac{16}{9}, \text{ 解得 } h' = \frac{4}{3}, \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$



(第 18 题图)



在 $Rt\triangle POC$ 中, $\cos\angle POC = \frac{PO}{OC} = \frac{1}{3}$, $\therefore \cos\angle POA = -\frac{1}{3}$.

在 $\triangle POA$ 中, $PA^2 = OA^2 + OP^2 - 2 \cdot OP \cdot OA \cdot \cos\angle POA = \frac{48}{9}$,

$\therefore PA = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, 设 PA 与平面 PEC 所成角为 θ ,10分

$\therefore \sin\theta = \frac{h'}{PA} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,11分

\therefore 直线 PA 与平面 PEC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$12分

(法二) 连结 AC , AC 与 EF 交于 O 点, 以 OA , OE 所在的直线分别为 x , y 轴, 过 O 作垂直于面 $ABCD$ 的直线为 z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,

依题意有 $A(\sqrt{2}, 0, 0)$, $C(-3\sqrt{2}, 0, 0)$, $E(0, \sqrt{2}, 0)$,6分

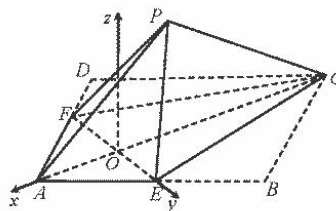
过 P 作 $PG \perp AC$, 在 $Rt\triangle POC$ 中,

$OP = \sqrt{2}$, $PC = 4$, $OC = 3\sqrt{2}$,

$\therefore OP \cdot PC = OC \cdot PG$,

$\therefore PG = \frac{4}{3}$, $OG = \sqrt{OP^2 - PG^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$,

$\therefore P(-\frac{\sqrt{2}}{3}, 0, \frac{4}{3})$,8分



$\therefore \overrightarrow{PA} = (\frac{4\sqrt{2}}{3}, 0, -\frac{4}{3})$, $\overrightarrow{PE} = (\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{2}, -\frac{4}{3})$, $\overrightarrow{CE} = (3\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$,

思路 1: $\because PF = PE = 2$, $EF = 2\sqrt{2}$, $\therefore PF \perp PE$,9分

显然 $PF \perp PC$, 又 $PE \cap PC = P$, $\therefore PF \perp$ 平面 PEC , 易知 $F(0, -\sqrt{2}, 0)$,

\therefore 平面 PEC 的一个法向量 $\overrightarrow{PF} = (\frac{\sqrt{2}}{3}, -\sqrt{2}, -\frac{4}{3})$,10分

设 PA 与平面 PEC 所成角为 θ ,

则 $\sin\theta = \frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PF}|}{|\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PF}|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,11分

\therefore 直线 PA 与平面 PEC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$12分

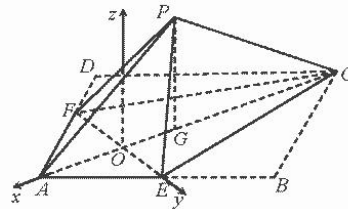
思路 2: 设平面 PEC 的法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$,

$$\therefore \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{CE} = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \overrightarrow{PE} = 0 \end{cases}, \therefore \begin{cases} 3\sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{3}x + \sqrt{2}y - \frac{4}{3}z = 0 \end{cases}$$

取 $x=1$, 则 $y=-3$, $z=-2\sqrt{2}$,
 则 $\mathbf{n}=(1, -3, -2\sqrt{2})$,10分
 设 PA 与平面 PEC 所成角为 θ ,

$$\text{则 } \sin \theta = \frac{|\overrightarrow{PA} \cdot \mathbf{n}|}{|\overrightarrow{PA}| \cdot |\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{3}}{3}, \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

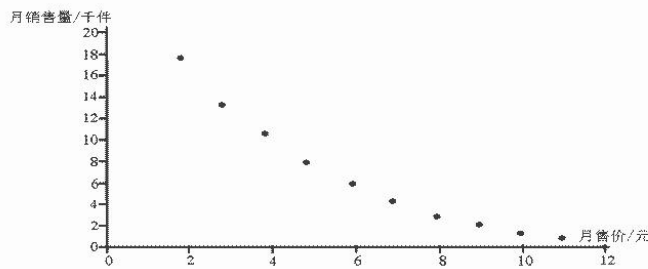
\therefore 直线 PA 与平面 PEC 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$12分



【说明】本题以翻折问题为载体考察空间中点，线，面的位置关系，异面直线垂直的判定，直线与平面所成角等知识，意在考察考生的空间想象能力，逻辑推理能力以及运算求解能力。

19. (本小题满分 12 分)

某网店销售某种商品，为了解该商品的月销量 y (单位：千件) 与月售价 x (单位：元/件) 之间的关系，对近几年的月销售量 y_i 和月销售价 x_i ($i=1, 2, 3, \dots, 10$) 数据进行了统计分析，得到了下面的散点图：



(1) 根据散点图判断， $y=c+d \ln x$ 与 $y=bx+a$ 哪一个更适宜作为月销量 y 关于月销售价 x 的回归方程类型？(给出判断即可，不需说明理由)，并根据判断结果及表中数据，建立 y 关于 x 的回归方程；

(2) 利用 (1) 中的结果回答问题：已知该商品的月销售额为 z (单位：千元)，当月销售量为何值时，商品的月销售额预报值最大？

解：(1) $y=c+d \ln x$ 更适宜销量 y 关于月销售价 x 的回归方程类型，.....1分

令 $u=\ln x$ ，先建立 y 关于 u 的线性回归方程，由于

$$\hat{d} = \frac{\sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})(u_i - \bar{u})}{\sum_{i=1}^{10} (u_i - \bar{u})^2} = \frac{-27.54}{2.70} = -10.20,$$

$\hat{c} = \bar{y} - \hat{d}\bar{u} = 6.6 + 10.20 \times 1.75 = 24.45$,4分
 所以 y 关于 u 的线性回归方程为 $\hat{y} = 24.45 - 10.20u$,
 因此 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y} = 24.45 - 10.20 \ln x$6分
 (2) 依题意得: $z = xy = x(24.45 - 10.20 \ln x)$,7分
 $z' = xy' = [x(24.45 - 10.20 \ln x)]' = 14.25 - 10.20 \ln x$,8分
 令 $z' = 0$, 即 $14.25 - 10.20 \ln x = 0$, 解得 $\ln x \approx 1.40$,
 所以 $x \approx 4.06$,10分
 当时 $x \in (0, 4.06)$, z 递增, 当 $x \in (4.06, +\infty)$ 时, z 递减,
 故当 $x = 4.06$, 即月销售量 $y = 10.17$ (千件) 时, 月销售额预报值最大.12分

【命题意图】本题考查线性回归方程的知识和应用, 通过散点图判断变量之间的关系建立回归模型, 通过利用线性回归方程求非线性回归方程, 通过建立函数模型利用导数求最大销售额问题. 综合考查概率统计知识分析处理数据, 解决实际问题的能力.

20. (本小题满分 12 分)

已知抛物线 $C: x^2 = 4y$, 过点 $(2, 3)$ 的直线 l 交 C 于 A, B 两点, 抛物线 C 在点 A, B 处的切线交于点 P .

- (1) 当点 A 的横坐标为 4 时, 求点 P 的坐标;
- (2) 设 Q 是抛物线 C 上的动点, 当 $|PQ|$ 取最小值时, 求点 Q 的坐标及直线 l 的方程.

解: (1) \because 点 A 的横坐标为 4, $\therefore A(4, 4)$,

易知此时直线 l 的方程为 $y = \frac{1}{2}x + 2$,1分

$$\text{联立 } \begin{cases} x^2 = 4y, \\ y = \frac{1}{2}x + 2, \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} x = -2, \\ y = 1, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x = 4, \\ y = 4, \end{cases} \therefore B(-2, 1), \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

由 $y = \frac{x^2}{4}$ 得 $y' = \frac{x}{2}$, 所以 $k_{PA} = 2$, 直线 PA 方程为 $y = 2x - 4$,3分

同理可得直线 PB 方程为 $y = -x - 1$,4分

$$\text{联立 } \begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = -x - 1 \end{cases}, \text{ 可得 } \begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}, \text{ 故点 } P \text{ 的坐标为 } (1, -2). \dots\dots\dots 5 \text{分}$$

(2) (法一) 设 $A(x_1, \frac{x_1^2}{4})$, $B(x_2, \frac{x_2^2}{4})$, 由 $y = \frac{x^2}{4}$, $y' = \frac{x}{2}$, 所以 $k_{PA} = \frac{x_1}{2}$,

所以直线 PA 的方程为 $y - \frac{x_1^2}{4} = \frac{x_1}{2}(x - x_1)$, 即 $y = \frac{x_1}{2}x - \frac{x_1^2}{4}$,6分

同理 PB 的方程为 $y = \frac{x_2}{2}x - \frac{x_2^2}{4}$, 联立解得 $P(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{x_1x_2}{4})$,7分

依题意直线 l 的斜率存在, 不妨设直线 l 的方程为 $y-3 = k(x-2)$,

$$\text{由 } \begin{cases} x^2 = 4y, \\ y-3 = k(x-2), \end{cases} \text{ 得 } x^2 - 4kx + 8k - 12 = 0,$$

易知 $\Delta > 0$, 因此 $x_1 + x_2 = 4k$, $x_1x_2 = 8k - 12$,

$\therefore P(2k, 2k-3)$,8分

\therefore 点 P 在直线 $l_1: x-y-3=0$ 上, 当 $|PQ|$ 取最小值时, 即抛物线 $C: x^2 = 4y$ 上的动点 Q 到直线 l_1 的距离最小,9分

$$\text{设 } Q(x_0, \frac{x_0^2}{4}), \text{ 则 } Q \text{ 到 } l_1 \text{ 的距离 } d = \frac{|\frac{x_0^2}{4} - x_0 - 3|}{\sqrt{2}} = \frac{|(\frac{x_0}{2} - 1)^2 + 2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} + \frac{(\frac{x_0}{2} - 1)^2}{\sqrt{2}}, \text{10分}$$

\therefore 当 $x_0 = 2$ 时, d 取最小值 $\sqrt{2}$, 此时 $Q(2,1)$,11分

易知过点 Q 且垂直于 l_1 的直线方程为 $y = -x + 3$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = -x + 3, \\ x - y - 3 = 0, \end{cases} \text{ 解得 } P(3,0), k = \frac{3}{2}, \therefore \text{ 直线 } l \text{ 的方程为 } y = \frac{3}{2}x,$$

综上, 点 Q 的坐标为 $(2,1)$, 直线 l 的方程为 $y = \frac{3}{2}x$,12分

(法二) 设 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $P(x_0, y_0)$, 由 $y = \frac{x^2}{4}$, $y' = \frac{x}{2}$,

$\therefore k_{PA} = \frac{x_1}{2}$, 直线 PA 的方程为 $y - y_1 = \frac{x_1}{2}(x - x_1)$, 即 $y = \frac{x_1}{2}x - y_1$,

同理 PB 的方程为 $y = \frac{x_2}{2}x - y_2$,7分

$$\text{因为点 } P \text{ 在切线 } PA, PB \text{ 上, } \therefore \begin{cases} y_0 = \frac{x_1}{2}x_0 - y_1, \\ y_0 = \frac{x_2}{2}x_0 - y_2, \end{cases}$$

$\therefore A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 在直线 $y_0 = \frac{x_0}{2}x - y$ 上,

\therefore 直线 l 的方程为 $y_0 = \frac{x_0}{2}x - y$,8分

又直线 l 的过点 $(2,3)$, $\therefore y_0 = x_0 - 3$,

即点 P 在直线 $l_1: x - y - 3 = 0$ 上,9分

以下同法一.

(法三) 设 $P(x_0, y_0)$, 显然两条切线的斜率均存在,

可设过点 P 与 C 相切的直线方程为 $y - y_0 = k(x - x_0)$, 且切线 PA , PB 的斜率分别为 k_1, k_2 ,

把 $y - y_0 = k(x - x_0)$ 与 $x^2 = 4y$ 联立, 并化简得,

$$x^2 - 4kx + 4kx_0 - 4y_0 = 0,$$

$$\therefore \Delta = (4k)^2 - 4(4kx_0 - 4y_0) = 0, \text{ 即 } k^2 - x_0k + y_0 = 0,$$

$$\therefore k_1, k_2 \text{ 是方程 } k^2 - x_0k + y_0 = 0 \text{ 的两根, } k_1 + k_2 = x_0, k_1k_2 = y_0, \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

此时 $x^2 - 4kx + 4kx_0 - 4y_0 = 0$ 的两根为 $x = 2k_1$ 或 $x = 2k_2$, 即为切点 A, B 的横坐标,

$$\therefore A(2k_1, k_1^2), B(2k_2, k_2^2), k_i = \frac{k_2^2 - k_1^2}{2k_2 - 2k_1} = \frac{k_1 + k_2}{2},$$

$$\text{直线 } l \text{ 的方程为 } y - k_1^2 = \frac{k_1 + k_2}{2}(x - 2k_1), \text{ 即 } y = \frac{k_1 + k_2}{2}x - k_1k_2, \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

又直线 l 过点 $M(2, 3)$, 则 $k_1 + k_2 - k_1k_2 = 3$, 即 $x_0 - y_0 = 3$,

\therefore 点 P 在直线 $l_1: x - y - 3 = 0$ 上. $\dots\dots\dots 9$ 分

以下同法一.

【说明】 本题以直线与抛物线为载体, 及其几何关系为背景, 利用方程思想解决几何问题, 主要考察抛物线的切点弦, 直线与抛物线的位置关系等知识, 考查学生的逻辑推理, 数学运算等数学核心素养及思辨能力.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = e^x - ae^{-x} - (a+1)x$ ($a \in \mathbf{R}$). (其中常数 $e=2.71828\dots$, 是自然对数的底数)

(1) 求函数 $f(x)$ 的极值点;

(2) 若对于任意 $0 < a < 1$, 关于 x 的不等式 $[f(x)]^2 < \lambda(e^{a-1} - a)$ 在区间 $(a-1, +\infty)$ 上存在实数解, 求

实数 λ 的取值范围.

解: (1) 易知 $f'(x) = e^x + ae^{-x} - (a+1) = \frac{(e^x - 1)(e^x - a)}{e^x}$, $\dots\dots\dots 1$ 分

① 当 $a \leq 0$ 时,

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	\sqcup	极小值	\sqcup

\therefore 函数 $f(x)$ 的极小值点为 $x=0$, 无极大值点; $\dots\dots\dots 2$ 分

② 当 $0 < a < 1$ 时,

x	$(-\infty, \ln a)$	$\ln a$	$(\ln a, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	□	极大值	□	极小值	□

∴ 函数 $f(x)$ 的极大值点为 $x = \ln a$, 极小值点为 $x = 0$;3 分

③ 当 $a = 1$ 时, $f'(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{e^x} \geq 0$,

∴ 函数 $f(x)$ 单调递增, 即 $f(x)$ 无极值点;4 分

④ 当 $a > 1$ 时,

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \ln a)$	$\ln a$	$(\ln a, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	□	极大值	□	极小值	□

∴ 函数 $f(x)$ 的极大值点为 $x = 0$, 极小值点为 $x = \ln a$;5 分

综上所述, 当 $a \leq 0$ 时, 函数 $f(x)$ 的极小值点为 $x = 0$, 无极大值点;

当 $0 < a < 1$ 时, 函数 $f(x)$ 的极大值点为 $x = \ln a$, 极小值点为 $x = 0$;

当 $a = 1$ 时, 函数 $f(x)$ 无极值点;

当 $a > 1$ 时, 函数 $f(x)$ 的极大值点为 $x = 0$, 极小值点为 $x = \ln a$.

(2) 以下需多次引用到如下不等式: $e^x \geq 1 + x$, 当且仅当 $x = 0$ 时取等号, 证明略.

注意到当 $0 < a < 1$ 时, 有 $\ln a < a - 1 < 0$.

(法一) ∵ 当 $0 < a < 1$ 时, $e^{a-1} > 1 + a - 1 = a$, ∴ $\ln a < a - 1 < 0$,6 分

(法二) 令 $g(a) = \ln a - a + 1$, 则 $g'(a) = \frac{1}{a} - 1$, 当 $0 < a < 1$ 时, $g'(a) > 0$,

∴ $g(a) < g(1) = 0$, 即 $a - 1 > \ln a$.

显然 $a - 1 < 0$, ∴ $\ln a < a - 1 < 0$,6 分

∴ 由 (1) 可知当 $0 < a < 1$ 时, $f(x)$ 在区间 $(a - 1, 0)$ 上递减, 在区间 $(0, +\infty)$ 上递增,

∴ $f(x)$ 在区间 $(a - 1, +\infty)$ 上的最小值为 $f(0) = 1 - a$,

∵ 关于 x 的不等式 $[f(x)]^2 < \lambda(e^{a-1} - a)$ 在区间 $(a - 1, +\infty)$ 上存在实数解,

∴ 只需当 $0 < a < 1$ 时, 关于 a 的不等式 $(1 - a)^2 < \lambda(e^{a-1} - a)$ 恒成立,8 分

由上易知当 $0 < a < 1$ 时, $e^{a-1} - a > 0$,

∴只需当 $0 < a < 1$ 时, 不等式 $\lambda > \frac{(1-a)^2}{e^{a-1}-a}$ 恒成立即可,9 分

令函数 $F(x) = \frac{(1-x)^2}{e^{x-1}-x}$, $0 \leq x < 1$, 则 $F'(x) = \frac{(x-1)(3e^{x-1}-xe^{x-1}-x-1)}{(e^{x-1}-x)^2}$,

(法一) 令函数 $G(x) = 3e^{x-1} - xe^{x-1} - x - 1$, $0 \leq x < 1$, 则 $G'(x) = (2-x)e^{x-1} - 1$,

当 $0 < x < 1$ 时, $\because e^{1-x} > 2-x$, $\therefore (2-x)e^{x-1} < 1$, $\therefore G'(x) < 0$,

∴ $G(x) > G(1) = 0$, 即 $G(x) > 0$,11 分

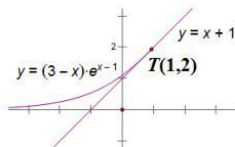
(法二) 令函数 $u(x) = (3-x)e^{x-1}$, $0 \leq x < 1$, 则 $u'(x) = (2-x)e^{x-1} > 0$,

∴ $u'(1) = 1$, 又 $u(1) = 2$,

∴ 函数 $u(x) = (3-x)e^{x-1}$ 在点 $T(1, 2)$ 处的切线方程为 $y - 2 = x - 1$, 即 $y = x + 1$,

如图所示, 易知 $(3-x)e^{x-1} \geq x + 1$,

当且仅当 $x = 1$ 时取等号,



∴ 当 $0 < x < 1$ 时, $G(x) > 0$,11 分

∴ 当 $0 < x < 1$ 时, $F'(x) < 0$,

∴ $F(x) < F(0) = e$, 即 $F(x) < e$,

∴ 当 $0 < a < 1$ 时, 不等式 $\lambda > \frac{(1-a)^2}{e^a - ea}$ 恒成立, 只需 $\lambda \geq e$,

综上, 实数 λ 的取值范围为 $[e, +\infty)$12 分

【命题意图】 本题以基本初等函数、不等式问题为载体, 考查学生利用导数分析、解决问题的能力, 分类讨论思想及逻辑推理、数学运算等数学核心素养, 具有一定综合性.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos\alpha, \\ y = \sin\alpha, \end{cases}$ (α 为参数), 圆 C_2 的方程为

$(x-2)^2 + y^2 = 4$, 以原点 O 为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系, 射线 l 的极坐标方程为 $\theta = \theta_0$ ($\rho \geq 0$).

(1) 求曲线 C_1 和圆 C_2 的极坐标方程;

(2) 当 $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2}$ 时, 射线 l 与曲线 C_1 和圆 C_2 分别交于异于点 O 的 M 、 N 两点, 若 $|ON| = 2|OM|$, 求 $\triangle MC_2N$ 的面积.

解: (1) 由 $\begin{cases} x = 2\cos\alpha, \\ y = \sin\alpha \end{cases}$, 得 C_1 的普通方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$,1分

把 $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ 代入, 得 $\frac{(\rho\cos\theta)^2}{4} + (\rho\sin\theta)^2 = 1$,

$$\text{即 } \rho^2 = \frac{4}{\cos^2\theta + 4\sin^2\theta} = \frac{4}{1 + 3\sin^2\theta},$$

所以 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2 = \frac{4}{1 + 3\sin^2\theta}$;3分

由 $(x-2)^2 + y^2 = 4$, 把 $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ 代入, 得 $\rho = 4\cos\theta$,

所以 C_2 的极坐标方程为 $\rho = 4\cos\theta$;5分

$$(2) \text{ 把 } \theta = \theta_0 \text{ 代入 } \rho^2 = \frac{4}{1 + 3\sin^2\theta}, \text{ 得 } \rho_M^2 = \frac{4}{1 + 3\sin^2\theta_0},$$

把 $\theta = \theta_0$ 代入 $\rho = 4\cos\theta$, 得 $\rho_N = 4\cos\theta_0$,6分

由 $|ON| = 2|OM|$, 得 $\rho_N = 2\rho_M$, 即 $\rho_N^2 = 4\rho_M^2$,

$$\text{即 } (4\cos\theta_0)^2 = \frac{16}{1 + 3\sin^2\theta_0}, \text{ 解得,7分}$$

$$\sin^2\theta_0 = \frac{2}{3}, \quad \cos^2\theta_0 = \frac{1}{3}, \quad \text{又 } 0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2},$$

$$\text{所以 } \rho_M = \sqrt{\frac{4}{1 + 3\sin^2\theta_0}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}, \quad \rho_N = 4\cos\theta_0 = \frac{4\sqrt{3}}{3}, \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\begin{aligned} \text{所以 } \triangle MC_2N \text{ 的面积 } S_{\triangle MC_2N} &= S_{\triangle OC_2N} - S_{\triangle OC_2M} \\ &= \frac{1}{2} |OC_2| (\rho_N - \rho_M) \cdot \sin\theta_0 = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{2\sqrt{3}}{3} \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分} \end{aligned}$$

【说明】本题主要考查了椭圆, 圆的极坐标方程与直角坐标方程以及参数方程的互化、极坐标的几何意义与应用等知识点, 重点考查数形结合思想, 体现了数学运算、逻辑推理等核心素养, 考察考生的化归与转化能力.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x-m| + |x + \frac{1}{m}| (m > 1)$.

(1) 当 $m=2$ 时, 求不等式 $f(x) > 3$ 的解集;

(2) 证明: $f(x) + \frac{1}{m(m-1)} \geq 3$.

解: (1) 当 $m=2$ 时, $f(x) = |x-2| + |x+\frac{1}{2}|$,1分

①当 $x \leq -\frac{1}{2}$ 时, 原不等式等价于 $(2-x) - (x+\frac{1}{2}) > 3$, 解得 $x < -\frac{3}{4}$,2分

②当 $-\frac{1}{2} < x < 2$ 时, 原不等式等价于 $\frac{5}{2} > 3$, 不等式无解,3分

③当 $x \geq 2$ 时, 原不等式等价于 $(x-2) + (x+\frac{1}{2}) > 3$, 解得 $x > \frac{9}{4}$,4分

综上, 不等式 $f(x) > 3$ 的解集为 $(-\infty, -\frac{3}{4}) \cup (\frac{9}{4}, +\infty)$;5分

(2) 由题 $f(x) = |x-m| + |x+\frac{1}{m}| \geq |m+\frac{1}{m}|$,6分

$\because m > 0, \therefore |m+\frac{1}{m}| = m+\frac{1}{m}$,

$\therefore f(x) \geq m+\frac{1}{m}$, 当且仅当 $x \in [-\frac{1}{m}, m]$ 时等号成立.7分

$\therefore f(x) + \frac{1}{m(m-1)} \geq m+\frac{1}{m} + \frac{1}{m(m-1)} = m+\frac{1}{m-1} = (m-1) + \frac{1}{m-1} + 1$,

$\because m > 1, \therefore m-1 > 0, \therefore (m-1) + \frac{1}{m-1} + 1 \geq 2\sqrt{(m-1) \cdot (\frac{1}{m-1})} + 1 = 3$,9分

$\therefore f(x) + \frac{1}{m(m-1)} \geq 3$, 当 $m=2$, 且 $x \in [-\frac{1}{2}, 2]$ 时等号成立.10分

【说明】本题主要考查绝对值三角不等式以及不等式的解法, 分段函数, 基本不等式等知识点, 重点考查分类讨论, 数形结合的思想, 体现了数学运算、逻辑推理等核心素养.

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主招生在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信扫一扫，快速关注