湖南师大附中2023届模拟试卷(一)

数 学

命题人:吴锦坤 谭泽仁 彭晓红 审题人:吴锦坤

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。

2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

第Ⅰ卷

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 满足等式$\{0,1\}\cup X=\{x\in\mathbf{R}\mid x^3=x\}$的集合 X 共有

A. 1 个　　B. 2 个　　C. 3 个　　D. 4 个

2. 已知$\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=2$,则 $\tan\theta=$

A. $\frac{4}{3}$　　B. $-\frac{2}{3}$　　C. $-\frac{4}{3}$　　D. $\frac{2}{3}$

3. 已知函数 $f(x)$是定义域为 $\mathbf{R}$ 的偶函数,且 $f(x+1)$为奇函数,当 $x\in[0,1]$时,$f(x)=k\cdot 3^x+a$. 若 $f(0)+f(3)=4$,则 $f(\log_3 2)=$

A. 2　　B. 0　　C. -3　　D. -6

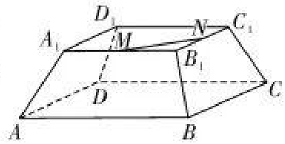
4. 正整数 $1,2,3,\cdots,n$ 的倒数的和 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$已经被研究了几百年,但是迄今为止仍然没有得到它的求和公式,只是得到了它的近似公式:当 n 很大时 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\approx\ln n+\gamma$. 其中 γ 称为欧拉—马歇罗尼常数,$\gamma\approx0.577215664901\cdots$,至今为止都不确定 γ 是有理数还是无理数. 设$[x]$表示不超过 x 的最大整数. 用上式计算$\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2022}\right]$的值为(参考数据:$\ln 2\approx0.69$,$\ln 3\approx1.10$,$\ln 10\approx2.30$)

A. 7　　B. 8　　C. 9　　D. 10

5. 甲、乙、丙、丁、戊 5 名志愿者参加三月份学雷锋活动,现有 A,B,C 三个小区可供选择,每个志愿者只能选其中一个小区. 则每个小区至少有一名志愿者,且甲不在 A 小区的概率为

A. $\frac{193}{243}$　　B. $\frac{100}{243}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{5}{9}$

6. 如图，已知正四棱台 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，$AB=6$，$A_1B_1=4$，$BB_1=2$，点 M，N 分别为 A_1B_1，B_1C_1 的中点，则下列平面中与 BB_1 垂直的平面是



A. 平面 A_1C_1D　　　B. 平面 DMN

C. 平面 $ACNM$　　　D. 平面 AB_1C

7. 已知函数 $f(x)=2+\ln x$，$g(x)=a\sqrt{x}$，若总存在两条不同的直线与函数 $y=f(x)$，$y=g(x)$图象均相切，则实数 a 的取值范围为

A. $(0,1)$　　B. $(0,2)$　　C. $(1,2)$　　D. $(1,\mathrm{e})$

8. 已知点 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_n\cdots$ 和数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$满足 $\overrightarrow{A_nA_{n+1}}=\left(\cos\frac{2n\pi}{3},\sin\frac{2n\pi}{3}\right)(n\in\mathbf{N}^*)$，$a_n\overrightarrow{A_nA_{n+1}}+a_{n+1}\overrightarrow{A_{n+1}A_{n+2}}=(0,b_n)$. 若 $a_1=1$，S_n，T_n 分别为数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和，则 $S_{60}+2T_{60}=$

A. -20　　B. $24\sqrt{3}$　　C. $48\sqrt{3}-20$　　D. 0

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，有选错的得 0 分，部分选对的得 2 分.

9. 下列命题正确的有

A. 若 $1-2\mathrm{i}$ 是 $ax^2+bx+c=0(a,b,c\in\mathbf{R})$的根，则该方程的另一个根必是 $1+2\mathrm{i}$.

B. $\forall Z_1\in\mathbf{C},Z_2\in\mathbf{C},|Z_1+Z_2|=|Z_1|+|Z_2|$

C. $\forall Z_1\in\mathbf{C},Z_2\in\mathbf{C},|Z_1\cdot Z_2|=|Z_1|\cdot|Z_2|$

D. 已知 $a,b\in\mathbf{R}$，i 是虚数单位，$a-1+(b-1)\mathrm{i}>0$，则 $a-1+\frac{\sin b}{a}$的最小值为 $2\sqrt{\sin 1}-1$

10. 甲箱中有 4 个红球，2 个白球和 3 个黑球，乙箱中有 3 个红球，3 个白球和 3 个黑球，先从甲箱中随机取出一球放入乙箱，分别以 A_1，A_2 和 A_3 表示由甲箱取出的球是红球，白球和黑球的事件；再从乙箱中随机取出一球，以 B 表示由乙箱取出的球是红球的事件，则下列结论正确的是

A. 事件 B 与事件 $A_i(i=1,2,3)$相互独立　　B. $P(A_1B)=\frac{8}{45}$

C. $P(B)=\frac{1}{3}$　　D. $P(A_2|B)=\frac{6}{31}$

11. 已知 F 是抛物线 $W:y^2=2px(p>0)$的焦点，点 $A(1,2)$在抛物线 W 上，过点 F 的两条互相垂直的直线 l_1，l_2 分别与抛物线 W 交于 B，C 和 D，E，过点 A 分别作 l_1，l_2 的垂线，垂足分别为 M，N，则

A. 四边形 $AMFN$ 面积的最大值为 2　　B. 四边形 $AMFN$ 周长的最大值为 $4\sqrt{2}$

C. $\frac{1}{|BC|}+\frac{1}{|DE|}$为定值$\frac{1}{2}$　　D. 四边形 $BDCE$ 面积的最小值为 32

12. 已知 AC 为圆锥 SO 底面圆 O 的直径（S 为顶点，O 为圆心），点 B 为圆 O 上异于 A,C 的动点，$SO=1,OC=\sqrt{3}$，研究发现：平面 α 和直线 SO 所成的角为 θ，$\angle ASO=\beta$，该圆锥侧面与平面 α 的交线为曲线 C. 当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，曲线 C 为圆；当 $\beta<\theta<\frac{\pi}{2}$ 时，曲线 C 为椭圆；当 $\theta=\beta$ 时，曲线 C 为抛物线；当 $\theta<\beta$ 时，曲线 C 为双曲线. 则下列结论正确的为

A. 过该圆锥顶点 S 的平面截此圆锥所得截面面积的最大值为 2

B. $\angle SAB$ 的取值范围为 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right)$

C. 若 $AB=BC$，E 为线段 AB 上的动点，则 $(SE+CE)_{\min}=\sqrt{10+2\sqrt{15}}$

D. 若 $\sin 2\theta=\frac{2\sqrt{2}}{3}$，则曲线 C 必为双曲线的一部分

第Ⅱ卷

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 设 m 为正整数，$(x+y)^{2m}$ 展开式的二项式系数的最大值为 a，$(x+y)^{13}$ 展开式的二项式系数的最大值为 b. 若 $13a=7b$，则 $(x^2+x+y)^m$ 的展开式中，x^7y^2 的系数为________.

14. 科拉茨是德国数学家，他在 1937 年提出了一个著名的猜想：任给一个正整数 n，如果 n 是偶数，就将它减半（即 $\frac{n}{2}$）；如果 n 是奇数，则将它乘 3 加 1（即 $3n+1$），不断重复这样的运算，经过有限步后，一定可以得到 1. 这是一个很有趣的猜想，但目前还没有证明或否定. 如果对正整数 n（首项）按照上述规则施行变换后的第 8 项为 1（注：1 可以多次出现），则满足条件的 n 的所有不同值的和为________.

15. 已知椭圆 C_1 与双曲线 C_2 有共同的焦点 F_1、F_2，椭圆 C_1 的离心率为 e_1，双曲线 C_2 的离心率为 e_2，点 P 为椭圆 C_1 与双曲线 C_2 在第一象限的交点，且 $\angle F_1PF_2=\frac{\pi}{3}$，则 $\frac{1}{e_1}+\frac{1}{e_2}$ 的最大值为________.

16. 设 x_1,x_2 分别是函数 $f(x)=2a^x-ex^2$（$a>0$ 且 $a\neq1$）的极小值点和极大值点，若 $x_2-x_1>0$，则 a 的取值范围是________.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17.（本小题满分 10 分）

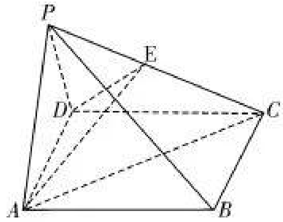
在 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 的对边分别为 a,b,c，已知 $b=7$，且 $\frac{a+b}{c}=\frac{\sin A-\sin C}{\sin A-\sin B}$.

（1）求 $\triangle ABC$ 的外接圆半径 R；

（2）求 $\triangle ABC$ 内切圆半径 r 的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

如图，在四棱锥 $P\text{-}ABCD$ 中，底面 $ABCD$ 是边长为 2 的菱形，$\triangle PAD$ 为等边三角形，平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，$PB\perp BC$.



(1)求点 A 到平面 PBC 的距离；

(2)E 为线段 PC 上一点，若直线 AE 与平面 $ABCD$ 所成的角的正弦值为$\dfrac{\sqrt{30}}{10}$，求平面 ADE 与平面 $ABCD$ 夹角的余弦值.

19.（本小题满分 12 分）

第 22 届世界杯于 2022 年 11 月 21 日到 12 月 18 日在卡塔尔举办. 在决赛中，阿根廷队通过点球战胜法国队获得冠军.

(1)扑点球的难度一般比较大. 假设罚点球的球员会等可能地随机选择球门的左、中、右三个方向射门，门将也会等可能地随机选择球门的左、中、右三个方向来扑点球，而且门将即使方向判断正确也有$\dfrac{2}{3}$的可能性扑不到球. 不考虑其它因素，在一次点球大战中，求门将在前三次扑到点球的个数 X 的分布列和期望；

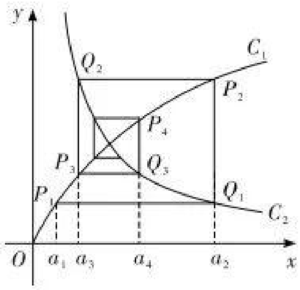
(2)好成绩的取得离不开平时的努力训练，甲、乙、丙三名前锋队员在某次传接球的训练中，球从甲脚下开始，等可能地随机传向另外 2 人中的 1 人，接球者接到球后再等可能地随机传向另外 2 人中的 1 人，如此不停地传下去，假设传出的球都能接住. 记第 n 次传球之前球在甲脚下的概率为 p_n，易知 $p_1=1$，$p_2=0$.

①试证明：$\left\{p_n-\dfrac{1}{3}\right\}$为等比数列；

②设第 n 次传球之前球在乙脚下的概率为 q_n，比较 p_{10} 与 q_{10} 的大小.

20.(本小题满分 12 分)

如图,已知曲线 $C_1:y=\dfrac{2x}{x+1}(x>0)$ 及曲线 $C_2:y=\dfrac{1}{3x}(x>0)$. 从 C_1 上的点 $P_n(n\in\mathbf{N}_+)$作直线平行于 x 轴,交曲线 C_2 于点 Q_n,再从点 Q_n 作直线平行于 y 轴,交曲线 C_1 于点 P_{n+1},点 P_n 的横坐标构成数列$\{a_n\}\left(0<a_1<\dfrac{1}{2}\right)$.



(1)试求 a_{n+1} 与 a_n 之间的关系,并证明:$a_{2n-1}<\dfrac{1}{2}<a_{2n}(n\in\mathbf{N}_+)$;

(2)若 $a_1=\dfrac{1}{3}$,求 a_n 的通项公式.

21.(本小题满分 12 分)

已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的一个焦点为 $F(2,0)$,O 为坐标原点,过点 F 作直线 l 与一条渐近线垂直,垂足为 A,与另一条渐近线相交于点 B,且 A,B 都在 y 轴右侧,$|OA|+|OB|=\sqrt{3}|AB|$.

(1)求双曲线 C 的方程;

(2)若直线 l_1 与双曲线 C 的右支相切,切点为 P,l_1 与直线 $l_2:x=\dfrac{3}{2}$交于点 Q,试探究以线段 PQ 为直径的圆是否过 x 轴上的定点.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=\dfrac{x\ln a}{e^x}+a\sin x(a>0)$,$f'(x)$为 $f(x)$的导数.

(1)若 $x=0$ 为 $f'(x)$的零点,试讨论 $f(x)$在区间$[0,\pi]$上零点的个数;

(2)当 $a=1$ 时,$\dfrac{f(x)}{2+\cos x}<mx(x>0)$,求实数 m 的取值范围.

关于我们