

2021 年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数 学

本试卷共 7 页，150 分。考试时长 120 分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共 40 分）

一、选择题共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

(1) 已知集合 $A = \{x | -1 < x < 1\}$ ， $B = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$ ，则 $A \cup B =$

(A) $\{x | -1 < x < 2\}$

(B) $\{x | -1 < x \leq 2\}$

(C) $\{x | 0 \leq x < 1\}$

(D) $\{x | 0 \leq x \leq 2\}$

(2) 若复数 z 满足 $(1-i) \cdot z = 2$ ，则 $z =$

(A) $-1-i$

(B) $-1+i$

(C) $1-i$

(D) $1+i$

(3) 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0, 1]$ ，则“ $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调递增”是“ $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上的最大值为 $f(1)$ ”的

(A) 充分而不必要条件

(B) 必要而不充分条件

(C) 充分必要条件

(D) 既不充分也不必要条件

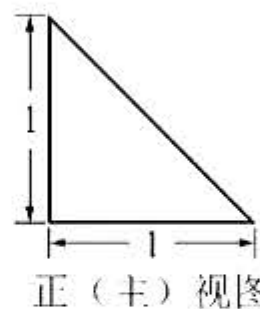
(4) 某四面体的三视图如图所示，该四面体的表面积为

(A) $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

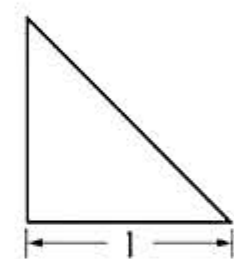
(B) $3 + \sqrt{3}$

(C) $\frac{3}{2} + \sqrt{3}$

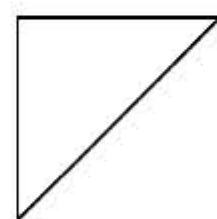
(D) $3 + \frac{\sqrt{3}}{2}$



正（主）视图



侧（左）视图



俯视图

(5) 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率为 2，且过点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ，则双曲线的方程为

(A) $2x^2 - y^2 = 1$

(B) $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$

(C) $5x^2 - 3y^2 = 1$

(D) $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{6} = 1$

(6) 《中国共产党党旗党徽制作和使用的若干规定》指出，中国共产党党旗为旗面缀有金黄色党徽图案的红旗，通用规格有五种，这五种规格党旗的长 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 (单位: cm) 成等差数列，对应的宽为 b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 (单位: cm)，且长与宽之比都相等. 已知 $a_1 = 288$ ， $a_5 = 96$ ， $b_1 = 192$ ，则 $b_3 =$

(A) 64

(B) 96

(C) 128

(D) 160

(7) 函数 $f(x) = \cos x - \cos 2x$ 是

(A) 奇函数，且最大值为 2

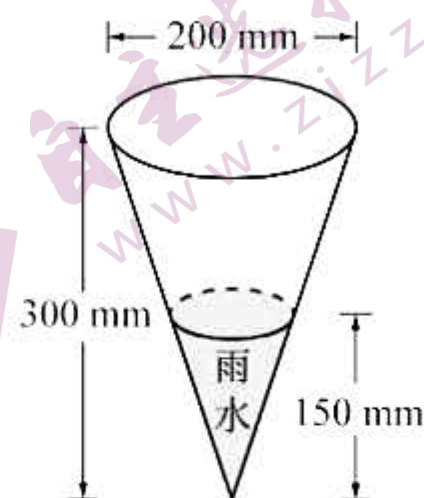
(B) 偶函数，且最大值为 2

(C) 奇函数，且最大值为 $\frac{9}{8}$

(D) 偶函数，且最大值为 $\frac{9}{8}$

(8) 某一时段内，从天空降落到地面上的雨水，未经蒸发、渗漏、流失而在水平面上积聚的深度，称为这个时段的降雨量 (单位: mm). 24 h 降雨量的等级划分如下:

等级	24 h 降雨量 (精确到 0.1)
.....	
小雨	0.1 ~ 9.9
中雨	10.0 ~ 24.9
大雨	25.0 ~ 49.9
暴雨	50.0 ~ 99.9
.....	



在综合实践活动中，某小组自制了一个底面直径为 200 mm，高为 300 mm 的圆锥形雨量器. 若一次降雨过程中，该雨量器收集的 24 h 的雨水高度是 150 mm (如图所示)，则这 24 h 降雨量的等级是

(A) 小雨

(B) 中雨

(C) 大雨

(D) 暴雨

(9) 已知直线 $y = kx + m$ (m 为常数) 与圆 $x^2 + y^2 = 4$ 交于点 M, N . 当 k 变化时, 若 $|MN|$ 的最小值为 2, 则 $m =$

(A) ± 1

(B) $\pm\sqrt{2}$

(C) $\pm\sqrt{3}$

(D) ± 2

(10) 已知 $\{a_n\}$ 是各项均为整数的递增数列, 且 $a_1 \geq 3$. 若 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 100$, 则 n 的最大值为

(A) 9

(B) 10

(C) 11

(D) 12

第二部分 (非选择题 共 110 分)

二、填空题共 5 小题, 每小题 5 分, 共 25 分。

(11) 在 $(x^3 - \frac{1}{x})^4$ 的展开式中, 常数项为_____。(用数字作答)

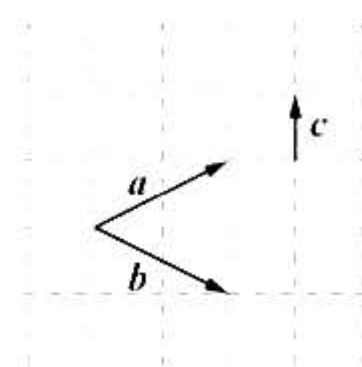
(12) 已知抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点为 F , 点 M 在抛物线上, MN 垂直 x 轴于点 N . 若 $|MF| = 6$, 则点 M 的横坐标为_____; $\triangle MNF$ 的面积为_____.

(13) 已知向量 a, b, c 在正方形网格中的位置如图所示. 若网格纸上小正方形的边长为 1, 则

$(a+b) \cdot c =$ _____; $a \cdot b =$ _____.

(14) 若点 $A(\cos \theta, \sin \theta)$ 关于 y 轴的对称点为 $B(\cos(\theta + \frac{\pi}{6}), \sin(\theta + \frac{\pi}{6}))$,

则 θ 的一个取值为_____.



(15) 已知函数 $f(x) = |\lg x| - kx - 2$, 给出下列四个结论:

① 当 $k = 0$ 时, $f(x)$ 恰有 2 个零点;

② 存在负数 k , 使得 $f(x)$ 恰有 1 个零点;

③ 存在负数 k , 使得 $f(x)$ 恰有 3 个零点;

④ 存在正数 k , 使得 $f(x)$ 恰有 3 个零点.

其中所有正确结论的序号是_____.

三、解答题共 6 小题，共 85 分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

(16) (本小题 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中， $c = 2b \cos B$ ， $\angle C = \frac{2\pi}{3}$ 。

(I) 求 $\angle B$ ；

(II) 再从条件 ①、条件 ②、条件 ③ 这三个条件中选择一个作为已知，使 $\triangle ABC$ 存在且唯一确定，求 BC 边上中线的长。

条件 ①： $c = \sqrt{2}b$ ；

条件 ②： $\triangle ABC$ 的周长为 $4 + 2\sqrt{3}$ ；

条件 ③： $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ 。

注：如果选择的条件不符合要求，第 (II) 问得 0 分；如果选择多个符合要求的条件分别解答，按第一个解答计分。

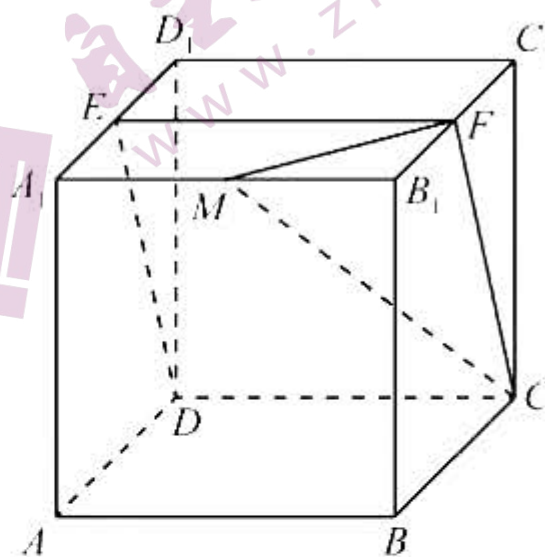
(17) (本小题 14 分)

如图，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E 为 A_1D_1 的中点， B_1C_1 与平面 CDE 交于点 F 。

(I) 求证： F 为 B_1C_1 的中点；

(II) 若 M 是棱 A_1B_1 上一点，且二面角 $M - FC - E$ 的余弦

值为 $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ，求 $\frac{A_1M}{A_1B_1}$ 的值。



(18) (本小题 13 分)

在核酸检测中,“ k 合 1”混采核酸检测是指:先将 k 个人的样本混合在一起进行 1 次检测,如果这 k 个人都没有感染新冠病毒,则检测结果为阴性,得到每人的检测结果都为阴性,检测结束;如果这 k 个人中有人感染新冠病毒,则检测结果为阳性,此时需对每人再进行 1 次检测,得到每人的检测结果,检测结束.

现对 100 人进行核酸检测,假设其中只有 2 人感染新冠病毒,并假设每次检测结果准确.

(I) 将这 100 人随机分成 10 组,每组 10 人,且对每组都采用“10 合 1”混采核酸检测.

(i) 如果感染新冠病毒的 2 人在同一组,求检测的总次数;

(ii) 已知感染新冠病毒的 2 人分在同一组的概率为 $\frac{1}{11}$, 设 X 是检测的总次数,求 X 的分布列与数学期望 EX .

(II) 将这 100 人随机分成 20 组,每组 5 人,且对每组都采用“5 合 1”混采核酸检测. 设 Y 是检测的总次数,试判断数学期望 EY 与 (I) 中 EX 的大小.(结论不要求证明)

(19) (本小题 15 分)

已知函数 $f(x) = \frac{3-2x}{x^2+a}$.

(I) 若 $a=0$, 求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(II) 若 $f(x)$ 在 $x=-1$ 处取得极值, 求 $f(x)$ 的单调区间, 并求其最大值与最小值.

(20) (本小题 15 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的一个顶点为 $A(0, -2)$, 以椭圆 E 的四个顶点为顶点的四边形面积为 $4\sqrt{5}$.

(I) 求椭圆 E 的方程;

(II) 过点 $P(0, -3)$ 作斜率为 k 的直线与椭圆 E 交于不同的两点 B, C , 直线 AB, AC 分别与直线 $y=-3$ 交于点 M, N , 当 $|PM| + |PN| \leq 15$ 时, 求 k 的取值范围.

(21) (本小题 15 分)

设 p 为实数. 若无穷数列 $\{a_n\}$ 满足如下三个性质, 则称 $\{a_n\}$ 为 $\mathfrak{R}_p$ 数列:

- ① $a_1 + p \geq 0$, 且 $a_2 + p = 0$;
- ② $a_{4n-1} < a_{4n}$ ($n = 1, 2, \dots$);
- ③ $a_{m+n} \in \{a_m + a_n + p, a_m + a_n + p + 1\}$ ($m = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots$).

(I) 如果数列 $\{a_n\}$ 的前四项为 $2, -2, -2, -1$, 那么 $\{a_n\}$ 是否可能为 $\mathfrak{R}_2$ 数列? 说明理由;

(II) 若数列 $\{a_n\}$ 是 $\mathfrak{R}_0$ 数列, 求 a_5 ;

(III) 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 是否存在 $\mathfrak{R}_p$ 数列 $\{a_n\}$, 使得 $S_n \geq S_{10}$ 恒成立? 如果存在, 求出所有的 p ; 如果不存在, 说明理由.

(考生务必将答案答在答题卡上, 在试卷上作答无效)

2021 年普通高等学校招生全国统一考试（北京卷）

数学参考答案

一、选择题（共 10 小题，每小题 4 分，共 40 分）

- (1) B (2) D (3) A (4) A (5) B
(6) C (7) D (8) B (9) C (10) C

二、填空题（共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）

- (11) -4 (12) 5 $4\sqrt{5}$
(13) 0 3 (14) $\frac{5\pi}{12}$ （答案不唯一）
(15) ①②④

三、解答题（共 6 小题，共 85 分）

(16)（共 13 分）

解：(I) 由正弦定理 $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 及 $c = 2b \cos B$ ，得 $\sin C = 2 \sin B \cos B$ 。

因为 $\angle C = \frac{2\pi}{3}$ ，所以 $\sin 2B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

又因为 $0 < \angle B < \frac{\pi}{3}$ ，所以 $\angle B = \frac{\pi}{6}$ 。

(II) 选条件 ②： $\triangle ABC$ 的周长为 $4 + 2\sqrt{3}$ 。

由 (I) 知， $\angle A = \pi - \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ 。

所以 $\triangle ABC$ 是顶角为 $\frac{2\pi}{3}$ ，底角为 $\frac{\pi}{6}$ 的等腰三角形。

所以 $a = b, c = \sqrt{3}a$ 。

由题设， $(2 + \sqrt{3})a = 4 + 2\sqrt{3}$ ，所以 $a = 2$ 。

设 BC 边上中线的长为 d 。

由余弦定理得 $d^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2 - 2 \times \frac{a}{2} \times a \cos C$ 。

所以 $d^2 = 1 + 4 - 2 \times 1 \times 2 \times (-\frac{1}{2})$.

故 $d = \sqrt{7}$.

选条件 ③: $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

由 (1) 知, $\angle A = \pi - \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$.

所以 $\triangle ABC$ 是顶角为 $\frac{2\pi}{3}$, 底角为 $\frac{\pi}{6}$ 的等腰三角形.

所以 $a = b$.

由题设, $\frac{1}{2}a^2 \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. 所以 $a = \sqrt{3}$.

设 BC 边上中线的长为 d .

由余弦定理得 $d^2 = (\frac{a}{2})^2 + a^2 - 2 \times \frac{a}{2} \times a \cos C$.

所以 $d^2 = \frac{3}{4} + 3 - 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{3} \times (-\frac{1}{2})$.

故 $d = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

(17) (共 14 分)

解: (I) 在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,

因为 $CD \parallel C_1D_1$, 且 $CD \not\subset$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$, 所以 $CD \parallel$ 平面 $A_1B_1C_1D_1$.

因为平面 $CDE \cap$ 平面 $A_1B_1C_1D_1 = EF$, 所以 $CD \parallel EF$.

所以 $C_1D_1 \parallel EF$.

因为 E 为 A_1D_1 的中点, 所以 F 为 B_1C_1 的中点.

(II) 不妨设正方体的棱长为 2.

如图建立空间直角坐标系 $D - xyz$,

则 $D(0, 0, 0)$, $C(0, 2, 0)$, $F(1, 2, 2)$.

所以 $\overrightarrow{DC} = (0, 2, 0)$, $\overrightarrow{CF} = (1, 0, 2)$.

设平面 CDE 的法向量为 $\boldsymbol{m} = (x_1, y_1, z_1)$, 则

$$\begin{cases} \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{DC} = 0, \\ \boldsymbol{m} \cdot \overrightarrow{CF} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} 2y_1 = 0, \\ x_1 + 2z_1 = 0. \end{cases}$$

令 $z_1 = 1$, 则 $x_1 = -2$, $y_1 = 0$.

于是 $\boldsymbol{m} = (-2, 0, 1)$.

由题设, 存在 $\lambda \in [0, 1)$, 使得 $\overrightarrow{A_1M} = \lambda \overrightarrow{A_1B_1}$.

所以 $M(2, 2\lambda, 2)$.

所以 $\overrightarrow{FM} = (1, 2\lambda - 2, 0)$.

设平面 MFC 的法向量为 $\boldsymbol{n} = (x_2, y_2, z_2)$, 则

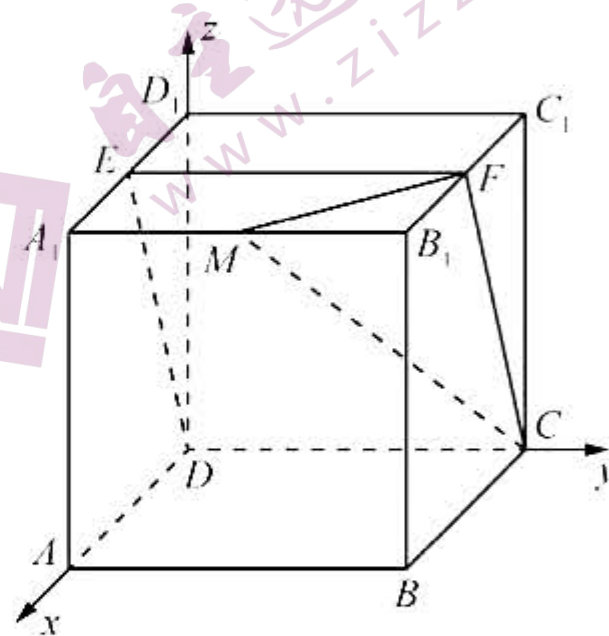
$$\begin{cases} \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{FM} = 0, \\ \boldsymbol{n} \cdot \overrightarrow{CF} = 0, \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_2 + (2\lambda - 2)y_2 = 0, \\ x_2 + 2z_2 = 0. \end{cases}$$

令 $x_2 = 2$, 则 $z_2 = -1$, $y_2 = \frac{1}{1-\lambda}$.

于是 $\boldsymbol{n} = (2, \frac{1}{1-\lambda}, -1)$.

由题设, $|\cos \langle \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \rangle| = \frac{|\boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{m}| |\boldsymbol{n}|} = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{5 + \frac{1}{(1-\lambda)^2}}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$, 所以 $\lambda = \frac{1}{2}$.

所以 $\frac{A_1M}{A_1B_1} = \frac{1}{2}$.



(18) (共 13 分)

解: (I) (i) 依题意, 如果感染新冠病毒的 2 人在同一组, 则该组需要检测 11 次,

其他 9 个组都只需要检测 1 次, 所以检测总次数为 20.

(ii) 由 (i) 知, 当感染新冠病毒的 2 人分在同一组时, 检测的总次数是 20.

当感染新冠病毒的 2 人分在不同组时, 可以求得检测的总次数是 30.

所以随机变量 X 的可能取值为 20, 30.

因为感染新冠病毒的 2 人分在同一组的概率为 $\frac{1}{11}$,

所以感染新冠病毒的 2 人分在不同组的概率为 $1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11}$.

所以随机变量 X 的分布列为:

X	20	30
P	$\frac{1}{11}$	$\frac{10}{11}$

故随机变量 X 的数学期望 $EX = 20 \times \frac{1}{11} + 30 \times \frac{10}{11} = \frac{320}{11}$.

(II) $EY > EX$.

(19) (共 15 分)

解: (I) 当 $a=0$ 时, $f(x) = \frac{3}{x^2} - \frac{2}{x}$, $f'(x) = -\frac{6}{x^3} + \frac{2}{x^2}$.

所以 $f(1)=1$, $f'(1)=-4$.

所以曲线 $y=f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程为 $y-1=-4(x-1)$,

即 $y=-4x+5$.

(II) 由 $f(x) = \frac{3-2x}{x^2+a}$ 得 $f'(x) = \frac{-2(x^2+a)-2x(3-2x)}{(x^2+a)^2} = \frac{2(x^2-3x-a)}{(x^2+a)^2}$.

由题意知 $f'(-1)=0$, 所以 $(-1)^2-3 \times (-1)-a=0$. 故 $a=4$.

当 $a=4$ 时, $f(x) = \frac{3-2x}{x^2+4}$, $f'(x) = \frac{2(x+1)(x-4)}{(x^2+4)^2}$.

$f'(x)$ 与 $f(x)$ 的情况如下:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 4)$	4	$(4, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$

因此, $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty, -1)$ 和 $(4, +\infty)$, 单调递减区间是 $(-1, 4)$.

所以 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, 4]$ 上的最大值是 $f(-1)=1$.

又因为当 $x \in (4, +\infty)$ 时, $f(x) < 0$, 所以 $f(-1)=1$ 是 $f(x)$ 的最大值.

同理可知, $f(4)=-\frac{1}{4}$ 是 $f(x)$ 的最小值.

(20) (共 15 分)

解: (I) 由题设, $b=2$, $\frac{1}{2} \times 2a \times 2b = 4\sqrt{5}$. 所以 $a = \sqrt{5}$.

所以椭圆 E 的方程为 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$.

(II) 直线 BC 的方程为 $y = kx - 3$.

$$\text{由 } \begin{cases} y = kx - 3, \\ 4x^2 + 5y^2 = 20 \end{cases} \text{ 得 } (5k^2 + 4)x^2 - 30kx + 25 = 0.$$

由 $\Delta = (-30k)^2 - 4 \times (5k^2 + 4) \times 25 = 400(k^2 - 1) > 0$, 得 $|k| > 1$.

设 $B(x_1, y_1)$, $C(x_2, y_2)$, 则 $x_1 + x_2 = \frac{30k}{5k^2 + 4}$, $x_1 x_2 = \frac{25}{5k^2 + 4}$.

直线 AB 的方程为 $y = \frac{y_1 + 2}{x_1} x - 2$.

令 $y = -3$, 得点 M 的横坐标为 $x_M = -\frac{x_1}{y_1 + 2} = -\frac{x_1}{kx_1 - 1}$.

同理可得点 N 的横坐标为 $x_N = -\frac{x_2}{y_2 + 2} = -\frac{x_2}{kx_2 - 1}$.

由题设, $y_1 + 2 > 0$, $y_2 + 2 > 0$, $x_1 x_2 > 0$, 所以 $x_M x_N = \frac{x_1 x_2}{(y_1 + 2)(y_2 + 2)} > 0$.

所以 x_M, x_N 同号.

所以 $|PM| + |PN| = |x_M + x_N|$

$$\begin{aligned} &= \left| \frac{x_1}{kx_1 - 1} + \frac{x_2}{kx_2 - 1} \right| \\ &= \left| \frac{2kx_1 x_2 - (x_1 + x_2)}{k^2 x_1 x_2 - k(x_1 + x_2) + 1} \right| \\ &= \left| \frac{2k \times \frac{25}{5k^2 + 4} - \frac{30k}{5k^2 + 4}}{k^2 \times \frac{25}{5k^2 + 4} - k \times \frac{30k}{5k^2 + 4} + 1} \right| \\ &= 5|k|. \end{aligned}$$

由题设, $5|k| \leq 15$.

所以 $1 < |k| \leq 3$.

所以 k 的取值范围是 $[-3, -1) \cup (1, 3]$.

(21) (共 15 分)

解: (I) 数列 $\{a_n\}$ 不可能为 $\mathfrak{R}_2$ 数列. 理由如下:

因为 $p=2$, $a_1=2$, $a_2=-2$, 所以 $a_1+a_2+p=2$, $a_1+a_2+p+1=3$.

因为 $a_3=-2$, 所以 $a_3 \notin \{a_1+a_2+p, a_1+a_2+p+1\}$.

所以数列 $\{a_n\}$ 不满足性质③.

(II) 根据 $\mathfrak{R}_0$ 数列的定义, 可知 $\{a_n\}$ 满足:

$a_1 \geq 0$, $a_2 = 0$; $a_{4n+1} < a_{4n}$; $a_{m+n} = a_m + a_n$ 或 $a_{m+n} = a_m + a_n + 1$.

由 $a_{n+1} = a_n + a_1$ 或 $a_{n+1} = a_n + a_1 + 1$, 以及 $a_1 \geq 0$, 可知 $a_{n+1} \geq a_n$.

所以 $a_1 = 0$.

由 $a_3 = a_1 + a_2 = 0$ 或 $a_3 = a_1 + a_2 + 1 = 1$; $a_4 = a_2 + a_2 = 0$ 或 $a_4 = a_2 + a_2 + 1 = 1$,

以及 $a_3 < a_4$, 可知 $a_3 = 0$, $a_4 = 1$.

由 $a_5 = a_2 + a_3 = 0$ 或 $a_5 = a_2 + a_3 + 1 = 1$,

以及 $a_5 \geq a_4$, 可知 $a_5 = 1$.

(III) 假设数列 $\{a_n\}$ 是满足 “ $S_n \geq S_{10}$ 恒成立” 的 $\mathfrak{R}_p$ 数列.

因为 $a_{n+1} = a_n + a_1 + p$ 或 $a_{n+1} = a_n + a_1 + p + 1$, 且 $a_1 + p \geq 0$, 所以 $a_{n+1} \geq a_n$.

由 $-p \leq a_1 \leq a_2 = -p$, 可知 $a_1 = -p$.

从而 $a_{4n} = a_{4n-1} + a_1 + p = a_{4n-1}$ 或 $a_{4n} = a_{4n-1} + a_1 + p + 1 = a_{4n-1} + 1$.

又因为 $a_{4n-1} < a_{4n}$, 所以 $a_{4n} = a_{4n-1} + 1$.

因为 $a_4 = a_3 + 1$, 且 $a_3 \geq a_2 = -p$, 所以 $a_4 \geq -p + 1$.

又因为 $a_4 \leq a_2 + a_2 + p + 1 = -p + 1$, 所以 $a_4 = -p + 1$, $a_3 = -p$.

因为 $a_{12} \leq a_6 + a_6 + p + 1$, 且 $a_6 \leq a_3 + a_3 + p + 1 = -p + 1$, 所以 $a_{12} \leq -p + 3$.

因为 $a_{11} = a_{12} - 1$, 所以 $a_{11} \leq -p + 2$.

由 $S_{11} \geq S_{10}$ 可知 $a_{11} \geq 0$, 所以 $p \leq 2$.

由 $a_{10} \geq a_8 = a_7 + 1$ 及 $a_7 \geq a_4 = -p + 1$, 可知 $a_{10} \geq -p + 2$.

由 $S_9 \geq S_{10}$ 可知 $a_{10} \leq 0$, 所以 $p \geq 2$.

综上所述, 若数列 $\{a_n\}$ 是满足 “ $S_n \geq S_{10}$ 恒成立” 的 $\mathfrak{R}_p$ 数列, 则 $p = 2$.

当 $p=2$ 时, 考虑数列 $\{a_n\}$:

$$a_n = \begin{cases} -2+k, & n \in \{4k+1, 4k+2, 4k+3\}, \\ -1+k, & n = 4k+4 \end{cases} \quad (k \in \mathbf{N}).$$

下面验证数列 $\{a_n\}$ 满足性质① ② ③.

由 $a_1 = -2, a_2 = -2$ 可知 $a_1 + p \geq 0, a_2 + p = 0$.

因为 $a_{4n-1} = n-3, a_{4n} = n-2$, 所以 $a_{4n-1} < a_{4n}$.

对于任意正整数 m, n , 存在 $k_1, k_2 \in \mathbf{N}, r_1, r_2 \in \{0, 1, 2, 3\}$, 使得

$$m = 4k_1 + r_1, n = 4k_2 + r_2.$$

所以 $a_m = -2 + k_1, a_n = -2 + k_2$.

所以 $a_m + a_n + p = -2 + k_1 + k_2, a_m + a_n + p + 1 = -1 + k_1 + k_2$.

又 $m + n = 4(k_1 + k_2) + r_1 + r_2$, 所以

当 $0 \leq r_1 + r_2 < 4$ 时, $a_{m+n} = -2 + k_1 + k_2$; 当 $4 \leq r_1 + r_2 \leq 6$ 时, $a_{m+n} = -1 + k_1 + k_2$.

所以 $a_{m+n} \in \{a_m + a_n + p, a_m + a_n + p + 1\}$.

由通项公式可知, 当 $n \leq 9$ 时, $a_n \leq a_{10} = 0$; 当 $n \geq 11$ 时, $a_n \geq a_{10} = 0$.

所以 $S_n \geq S_{10}$ 恒成立.

综上, 存在 $\mathfrak{R}_p$ 数列 $\{a_n\}$, 使得 $S_n \geq S_{10}$ 恒成立, 这时 $p=2$.