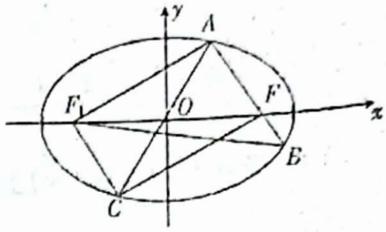
绵阳南山中学2020级高三下期入学考试参考答案

1．A． 2．B． 3．C 4．A 5．C 6．D 7．C 8．B 9．D 10．B 11．D 12．A

11．【详解】如图，作F_1为椭圆M的左焦点，连接AF_1,CF_1,BF_1．设$|AF|=x$，则$|BF|=\frac{x}{2}$，$|CF|=2a-x$，$BF_1=2a-\frac{x}{2}$，因为A，C是椭圆上关于原点O对称的两点，直线AF与椭圆的另一个交点为B，$AF\perp FC$

所以$AF\perp AF_1$所以$\begin{cases}(2a-x)^2+x^2=4c^2,\\(2a-x)^2+\left(\frac{3}{2}x\right)^2=\left(2a-\frac{x}{2}\right)^2,\end{cases}$ 可得$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$．故选：D



12．A【详解】因为$0<\frac{\pi}{2}-1.25<\frac{\pi}{2}$，$0<\frac{1}{3}<\frac{\pi}{2}$，所以$c=\cos1.25=\sin\left(\frac{\pi}{2}-1.25\right)$，

由于$\frac{\pi}{2}=\frac{6\pi}{12}<\frac{1}{3}+1.25=\frac{1}{3}+\frac{5}{4}=\frac{19}{12}$，故$\frac{\pi}{2}-1.25<\frac{1}{3}$，故$\sin\left(\frac{\pi}{2}-1.25\right)<\sin\frac{1}{3}$，

设$u(x)=\sin x-x,x\in(0,\frac{\pi}{2})$，则$u'(x)=\cos x-1<0,x\in(0,\frac{\pi}{2})$，即$u(x)=\sin x-x,x\in(0,\frac{\pi}{2})$单调递减，故

$u(x)<u(0)=0$，即$\sin x<x,x\in(0,\frac{\pi}{2})$，故$\sin\frac{1}{3}<\frac{1}{3}$，即$c<b$；$a=\ln1.5$，$b=\frac{1}{3}=\frac{0.5}{1.5}=\frac{1.5-1}{1.5}$，令$f(x)=\ln x$，

$g(x)=\frac{x-1}{x}=1-\frac{1}{x}$，令$h(x)=f(x)-g(x)=\ln x-1+\frac{1}{x},x>0$，则$h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1}{x^2},x>0$，

当$0<x<1$时，$h'(x)<0,h(x)$在$(0,1)$递减，当$x>1$时，$h'(x)>0,h(x)$在$(1,+\infty)$递增，所以$h(x)\ge h(1)=0$，

即$f(x)\ge g(x)$（当且仅当$x=1$时等号成立），$\therefore f(1.5)>g(1.5)$，即$\ln1.5>\frac{1.5-1}{1.5}=\frac{1}{3}$，即$a>b$，$\therefore a>b>c$，

13．$-\frac{3}{2}$ 14．2 15．$\frac{1}{5}$ 16．$\frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$

16．【详解】解：取BC的中点D，连接PD，AD，$PB=PC$，$PD\perp BC$，$\triangle PBC$的面积为$5\sqrt{3}$，

则$\frac{1}{2}\times2\sqrt{3}\times PD=5\sqrt{3}$，解得$PD=5$，$AD=\frac{\sqrt{3}}{2}BC=3$，$PB=\sqrt{PD^2+BD^2}=2\sqrt{7}$，又$\angle PAB=90^\circ$，

$PA=\sqrt{PB^2-AB^2}=4$，所以$PA^2+AD^2=PD^2$，即$PA\perp AD$，又$PA\perp AB$，$AB\cap AD=A$，$AB,AD\subset$平面ABC，

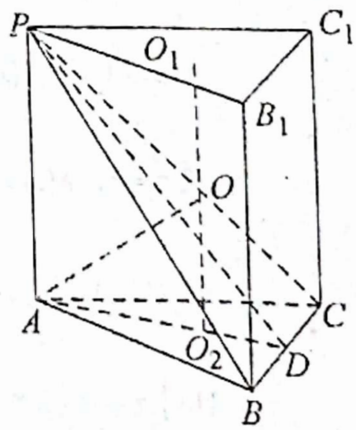
可得$PA\perp$平面ABC，将三棱锥$P-ABC$补成正三棱柱PB_1C_1-ABC，

三棱锥$P-ABC$的外接球即正三棱柱的外接球，

外接球的球心O为上、下底面的外接圆圆心的连线O_1O_2的中点，连接AO_2，AO，

设外接球的半径为R，下底面外接圆的半径为r，$r=AO_2=\frac{2}{3}AD=2$，则$R^2=r^2+4=8$，

所以$R=2\sqrt{2}$，所求外接球的体积为$V=\frac{4\pi R^3}{3}=\frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$；故答案为：$\frac{64\sqrt{2}\pi}{3}$



17．【详解】解：（1）由$a_n^2+a_n=2S_n$①，$\therefore a_{n+1}^2+a_{n+1}=2S_{n+1}$②；

②减①即得：$(a_{n+1}+a_n)=a_{n+1}^2-a_n^2=(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)$．由 $a_n>0$，可得 $a_{n+1}-a_n=1$．

当 $n=1$ 时，$a_1^2+a_1=2a_1$，解得 $a_1=0$（舍去）或 $a_1=1$．

所以 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公差为 1 的等差数列，通项公式为 $a_n=n$．

（2）由（1）可知 $b_n=2^{a_n}=2^n$ $\therefore T_n=(3n-1)\cdot 2+(3n-4)\cdot 2^2+\cdots+2\cdot 2^n$ ①

$$2T_n=(3n-1)\cdot 2^2+(3n-4)\cdot 2^3+\cdots+2\cdot 2^{n+1}\text{②}$$

②-①$\therefore T_n=-(3n-1)\cdot 2+3(2^2+2^3+\cdots+2^n)+2\cdot 2^{n+1}=2^{n+2}-(3n-1)\cdot 2+3\cdot\dfrac{4(2^{n-1}-1)}{2-1}=10\cdot 2^n-2(3n-1)-12$

$T_n=10\cdot 2^n-2(3n-1)-12$

18.【详解】(1) 解：因为 $\dfrac{2\cos B}{ac}=\dfrac{\cos A}{ab}+\dfrac{\cos C}{bc}$，所以 $2b\cos B=c\cos A+a\cos C$，

由正弦定理可得 $2\sin B\cos B=\sin C\cos A+\sin A\cos C$，即 $2\sin B\cos B=\sin(C+A)=\sin B$，

因为 $B\in(0,\pi)$，所以 $\sin B>0$，所以 $\cos B=\dfrac{1}{2}$，则 $B=\dfrac{\pi}{3}$．

（2）解：因为 $b=\sqrt{6}$，$B=\dfrac{\pi}{3}$，由余弦定理 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，即 $6=a^2+c^2-ac$，

所以 $a^2+c^2=6+ac\geq 2ac$ 当且仅当 $a=c$ 时取等号，

所以 $ac\leq 6$，则 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ac\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{4}ac\leq\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，当且仅当 $a=c=\sqrt{6}$ 时取等号，所以 $(S_{\triangle ABC})_{\max}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，

又 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AC\cdot BD$，所以 $BD=\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{AC}=\dfrac{2S_{\triangle ABC}}{\sqrt{6}}\leq\dfrac{2\times\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{6}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，故 BD 的最大值为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

19.【详解】(1) 证明：因为 $AA_1\perp$ 平面 ABC，$CB\subset$ 平面 ABC，所以 $AA_1\perp BC$，

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，四边形 AA_1C_1C 为平行四边形，则 $AC=A_1C_1=8$，

因为 $AB=4\sqrt{3}$，$CB=4$，所以 $AB^2+CB^2=AC^2$，所以 $CB\perp AB$，

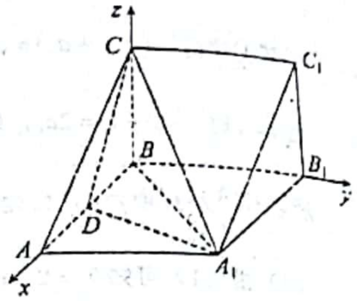
又因为 $AB\cap AA_1=A$，$AA_1\subset$ 平面 ABB_1A_1，$AB\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $CB\perp$ 平面 ABB_1A_1，

因为 $CB//C_1B_1$，所以 $C_1B_1\perp$ 平面 ABB_1A_1，

又 $A_1D\subset$ 平面 ABB_1A_1，所以 $C_1B_1\perp A_1D$．$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC=8\sqrt{3}$，

$\because D$ 为 AB 的中点，则 $S_{\triangle ACD}=\dfrac{1}{2}S_{\triangle ABC}=4\sqrt{3}$，因为 $AA_1\perp$ 平面 ABC，

$V_{A-A_1CD}=V_{A_1-ACD}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot AA_1=\frac{1}{3}\times4\sqrt{3}\times AA_1=8$，



所以 $AA_1=2\sqrt{3}$，所以在$\triangle A_1DB_1$中，$A_1D=B_1D=2\sqrt{6}$，$A_1B_1=4\sqrt{3}$，

所以 $A_1D^2+B_1D^2=A_1B_1^2$，所以 $A_1D\perp B_1D$，$C_1B_1\cap B_1D=B_1$，

$C_1B_1,B_1D\subset$平面B_1C_1D，所以$A_1D\perp$平面B_1C_1D；

（2）因为$BB_1\perp$平面ABC，$BC\perp AB$，以点B为坐标原点，

BA、BB_1、BC所在直线分别为x、y、z轴建立如下图所示的空间直角坐标系，

则$C(0,0,4)$、$D(2\sqrt{3},0,0)$、$A_1(4\sqrt{3},2\sqrt{3},0)$、$B_1(0,2\sqrt{3},0)$，

设平面DA_1C的法向量为$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{DA_1}=(2\sqrt{3},2\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{DC}=(-2\sqrt{3},0,4)$，则

$\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{DA_1}=2\sqrt{3}x_1+2\sqrt{3}y_1=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{DC}=-2\sqrt{3}x_1+4z_1=0\end{cases}$，取$x_1=2$，可得$\vec{m}=(2,-2,\sqrt{3})$，

设平面A_1CB的法向量为$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$，$\overrightarrow{BA_1}=(4\sqrt{3},2\sqrt{3},0)$，$\overrightarrow{BC}=(0,0,4)$，

则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=4\sqrt{3}x_2+2\sqrt{3}y_2=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=4z_2=0\end{cases}$，取$x_2=1$，可得$\vec{n}=(1,-2,0)$，

所以，$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{6}{\sqrt{11}\times\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{55}}{55}$，所以平面$DA_1C$与平面$A_1CB$夹角的余弦值为$\frac{6\sqrt{55}}{55}$.

20.【详解】(1) 因为抛物线$C:y^2=2px(p>0)$的焦点到准线的距离是1，所以$p=1$，标准方程为$y^2=2x$.

(2) 当$y=1$时，$x=\frac{1}{2}$，所以$P\left(\frac{1}{2},1\right)$，设$A(2a^2,2a),B(2b^2,2b)$，

则直线AB为$y-2a=\frac{1}{a+b}(x-2a^2)$，即$x-(a+b)y+2ab=0$.

因为直线$PA:x-\left(a+\frac{1}{2}\right)y+a=0$与圆$O:(x-2)^2+y^2=r^2$相切，

所以$\frac{|a+2|}{\sqrt{1+\left(a+\frac{1}{2}\right)^2}}=r$，整理得$(r^2-1)a^2+(r^2-4)a+\frac{5}{4}r^2-4=0$.

同理，直线PB与圆$O:(x-2)^2+y^2=r^2$相切，可得$(r^2-1)b^2+(r^2-4)b+\frac{5}{4}r^2-4=0$.

所以可得a,b是方程$(r^2-1)x^2+(r^2-4)x+\frac{5}{4}r^2-4=0$的两个根，

所以$a+b=\dfrac{4-r^2}{r^2-1}, ab=\dfrac{\frac{5}{4}r^2-4}{r^2-1}$，代入$x-(a+b)y+2ab=0$，化简得$\left(x+y+\frac{5}{2}\right)r^2-x-4y-8=0$，

若直线过定点，则须满足$\begin{cases}x+y+\frac{5}{2}=0\\-x-4y-8=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=-\frac{2}{3}\\y=-\frac{11}{6}\end{cases}$所以直线$AB$恒过定点$\left(-\frac{2}{3},-\frac{11}{6}\right)$.

21. 【详解】(1) 解：当$a=1$时$f(x)=2x-\frac{2}{x}-\ln x$定义域为$(0,+\infty)$，

又$f'(x)=2+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2-x+2}{x^2}=\dfrac{2\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{8}}{x^2}>0$，

所以$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，即$f(x)$的单调递增区间为$(0,+\infty)$，无单调递减区间.

(2) 解：由题知，$f(x)=2x-\frac{2}{x}-a\ln x$，函数$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=2+\dfrac{2}{x^2}-\dfrac{a}{x}=\dfrac{2x^2-ax+2}{x^2}$，

当$a\le 0$时，对任意的$x>0$，$f'(x)>0$恒成立，故$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，没有极值点；

当$0<a\le 4$时，$\Delta=a^2-16\le 0$，$f'(x)\ge 0$且$f'(x)$不恒为零，

故$f(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，没有极值点；

当$a>4$时，令$f'(x)=0$，解得$x_1=\dfrac{a+\sqrt{a^2-16}}{4}$，$x_2=\dfrac{a-\sqrt{a^2-16}}{4}$，则$x_1>x_2>0$，

当$x\in(0,x_2)$时，$f'(x)>0$；当$x\in(x_2,x_1)$时，$f'(x)<0$；当$x\in(x_1,+\infty)$时，$f'(x)>0$，

此时函数$f(x)$的单调递增区间为$\left(0,\dfrac{a-\sqrt{a^2-16}}{4}\right)$、$\left(\dfrac{a+\sqrt{a^2-16}}{4},+\infty\right)$，

单调递减区间为$\left(\dfrac{a-\sqrt{a^2-16}}{4},\dfrac{a+\sqrt{a^2-16}}{4}\right)$.

综上，当$a>4$时，$f(x)$有两极值点x_1、x_2，且$x_1+x_2=\frac{a}{2}$，$x_1x_2=1$，

所以$f(x_1)-f(x_2)=2x_1-\dfrac{2}{x_1}-a\ln x_1-\left(2x_2-\dfrac{2}{x_2}-a\ln x_2\right)=4\left(x_1-\dfrac{1}{x_1}\right)-a\ln\dfrac{x_1}{x_2}=4\left(x_1-\dfrac{1}{x_1}\right)-4\left(x_1+\dfrac{1}{x_1}\right)\ln x_1$，

设$x_1=t$，$h(t)=4\left(t-\frac{1}{t}\right)-4\left(t+\frac{1}{t}\right)\ln t$，其中$t\in(1,\mathrm{e}]$，

所以$h'(t)=4\left(1+\dfrac{1}{t^2}\right)-4\left[\left(1-\dfrac{1}{t^2}\right)\ln t+\left(t+\dfrac{1}{t}\right)\cdot\dfrac{1}{t}\right]=\dfrac{4(1-t^2)\ln t}{t^2}$，又因为$t\in(1,\mathrm{e}]$，可知$h'(t)<0$，所以$h(t)$在$(1,\mathrm{e}]$上单调递减. $\therefore h(1)>h(t)\ge h(\mathrm{e})$，即$-\frac{8}{\mathrm{e}}\le h(t)<0$，所以$f(x_1)-f(x_2)$的取值范围为$\left[-\frac{8}{\mathrm{e}},0\right)$.

22、(1)解：由题意得：由 C_1：$\begin{cases}x=1+t,\\ y=t,\end{cases}$（$t$为参数），消去$t$得：

$x-y-1=0$故C_1的极坐标方程为$\rho\cos\theta-\rho\sin\theta-1=0$

由C_2：$\begin{cases}x=\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}\cos\theta,\\ y=\dfrac{3}{2}\sin\theta,\end{cases}$（$\theta$为参数），消去$\theta$得：$x^2+y^2-3x=0$，故$C_2$的极坐标方程为$\rho=3\cos\theta$

(2) 设$A(\rho_1,\theta)$，$B(\rho_2,\theta)$ ∴ 联立$\begin{cases}\rho\cos\theta-\rho\sin\theta-1=0\\ \rho=3\cos\theta\end{cases}\Rightarrow \dfrac{2}{9}\rho^4-\dfrac{5}{3}\rho^2-1=0$

所以 $\rho_1^2+\rho_2^2=\dfrac{15}{2}$ 故$|OA|^2+|OB|^2=\rho_1^2+\rho_2^2=\dfrac{15}{2}$

23.【详解】（1）因为$t>0$，所以$f(x)=|x+2|+2|x-t|=\begin{cases}-(x+2)-2(x-t),x<-2\\(x+2)-2(x-t),-2\le x<t\\(x+2)+2(x-t),x\ge t\end{cases}$，

即$f(x)=\begin{cases}-3x+2t-2,x<-2\\-x+2t+2,-2\le x<t\\3x+2-2t,x\ge t\end{cases}$，则$f(x)$在$(-\infty,t)$内单调递减，在$(t,+\infty)$内单调递增，

所以$f(x)_{\min}=f(t)=t+2$，由题意，得$t+2=5$，解得$t=3$.

（2）由（1）知，$2a+b+c=3$，

$$\frac{1}{2a}+\frac{4}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{3}(2a+b+c)\left(\frac{1}{2a}+\frac{4}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge\frac{1}{3}\left(\sqrt{2a}\cdot\frac{1}{\sqrt{2a}}+\sqrt{b}\cdot\frac{2}{\sqrt{b}}+\sqrt{c}\cdot\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2$$

$=\dfrac{1}{3}(1+2+1)^2=\dfrac{16}{3}$，当且仅当$a=\dfrac{3}{8}$、$b=\dfrac{3}{2}$、$c=\dfrac{3}{4}$时取等号，所以$\dfrac{1}{2a}+\dfrac{4}{b}+\dfrac{1}{c}$的最小值为$\dfrac{16}{3}$.

自主选拔在线 微信号：zizzsw