炎德·英才·名校联考联合体2021年春季高二期末联考暨新高三适应性联合考试

数学参考答案

一、二、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	C	B	D	A	B	C	ACD	BCD	AD	ABD

1. 考点：两集合的交并补运算，子集个数求法

【解析】$A=\{x|-3<x<3\}$，$B=\{0,1,2,3,4\}$，则 $A\cap B=\{0,1,2\}$，

$\therefore A\cap B$ 的子集个数为 $2^3=8$ 个。

2. 考点：平面向量数量积运算

【解析】$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})$，则 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{CB}^2-\overrightarrow{CA}^2)=-14$.

3. 考点：古典概型求概率

【解析】由题意可得恰好一个白球一个红球的概率为 $p=\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}=\frac{3}{5}$.

4. 考点：椭圆的离心率与 a、b 的关系

【解析】由 $e=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，得 $a^2=4b^2$，即 $a=2b$.

5. 考点：抽象函数的单调性与奇偶性应用

【解析】$\because$ 函数 $f(x)$ 是偶函数，$\therefore x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)$ 是减函数，$\therefore f(-\pi)=f(\pi)<f(3)<f(2)$，故选 D.

6. 考点：数列文化题，等比数列的通项公式和求和问题

【解析】设大老鼠第 n 天打洞的距离为 a_n，则数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1，公比为 2 的等比数列，其前 n 项和为 S_n；小老鼠第 n 天打洞的距离为 b_n，则数列 $\{b_n\}$ 是首项为 1，公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列，其前 n 项和为 T_n. 则 $S_n+T_n=2^n-\frac{1}{2^{n-1}}+1$，则 $S_3+T_3=8+\frac{3}{4}$，从而相距 $\frac{5}{4}$ 尺.

7. 考点：二项式定理的应用

【解析】由二项式展开公式知 $(x-2y)^4$ 的第 $r+1$ 项为 $T_{r+1}=C_4^rx^{4-r}(-2)^ry^r$，令 $4-r=1$ 得 $r=3$，令 $4-r=3$ 得 $r=1$，$\therefore$ 在 $\left(x+\frac{y^2}{x}\right)(x-2y)^4$ 的展开式中 x^2y^3 项的系数为：-40.

8. 考点：计数原理的应用

【解析】当 $n=3$ 时，第一个手势有 12 种，第二个手势有 11 种，第三个手势有 11 种，共计 $12\times11\times11=1452$ 种；

当 $n=4$ 时，共计 $12\times11\times11\times11$ 种；当 $n=7$ 时，共计 12×11^6 种；当 $n=10$ 时，共计 12×11^9 种；当 $n=11$ 时，共计 12×11^{10} 种.

9. 考点：饼图中的数据分析

【解析】由题意，不妨设 2015 年全国居民人均消费支出为 a，则 2020 年全国居民人均消费支出为 $1.5a$，而 $9.6\%\times1.5a>11\%a$，故 A 正确；由图可知 2020 年全国人均衣食行支出为 $49\%\times1.5a=73.5\%a$，而 2015 年全国人均衣食行支出为 $51.3\%a$，故 B 错误；2020 年全国人均居住和医疗卫生支出金额总和为 $(24.6\%+8.7\%)\times1.5a=49.95\%a$，而 2015 年除衣食行外的全国人均其他支出金额总和为 $48.7\%a$，故 C 正确；D 显然正确.

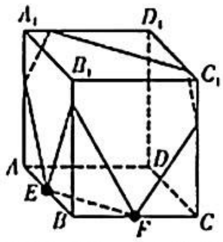
10. 考点：基本不等式的应用

【解析】对于 A，若 $ab+\frac{1}{ab}\geq2\sqrt{ab\cdot\frac{1}{ab}}=2$（当且仅当 $ab=\frac{1}{ab}=1$ 取"="），又由 $ab\leq\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，故 A

估：由$\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$且$a+b=1$，$\therefore a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$，故B正确；C由$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=\frac{b}{a}+\frac{a}{b}+2\geqslant2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+2=4$，当且仅当$a=b=\frac{1}{2}$时取"="，故C正确；D由$a+b=1$，且$a$、$b$为正数，$\therefore -1<a-b<1$，即$2^{-1}<2^{a-b}<2$，故D正确.

11. 考点：截面问题

【解析】如图所示：



12. 考点：复数新概念、对数运算、平面向量的数量积运算、两角差的余弦公式

【解析】$\because \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=e^{\frac{\pi}{3}i}$，$\therefore \ln\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\ln e^{\frac{\pi}{3}i}=\frac{\pi}{3}i$.

$\because \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=e^{\frac{\pi}{3}i}$，$\therefore z^{2021}=e^{\frac{2021\pi}{3}i}=\cos\frac{2021\pi}{3}+i\sin\frac{2021\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

$\because e^{i\alpha}$对应的向量坐标为$(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$e^{i\beta}$对应的向量坐标为$(\cos\beta,\sin\beta)$，$\therefore \cos\alpha\cos\beta+\sin\beta\sin\alpha=0$，即$\cos(\alpha-\beta)=0$，又$0\leqslant\alpha,\beta<2\pi$，$\therefore |\alpha-\beta|=\frac{\pi}{2}$，或$\frac{3\pi}{2}$.

$\because e^{i\alpha}=\cos\alpha+i\sin\alpha$，复数$ie^{i\alpha}=-\sin\alpha+i\cos\alpha$，两者对应向量坐标为$(\cos\alpha,\sin\alpha)$、$(-\sin\alpha,\cos\alpha)$，$\therefore$两向量垂直.

三、填空题

13. 考点：诱导公式、同角三角函数的关系、正弦二倍角公式

$-\frac{4\sqrt{2}}{9}$　【解析】由$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{1}{3}$，得$\sin\alpha=\frac{1}{3}$，又$\alpha\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$，所以$\cos\alpha=-\frac{2\sqrt{2}}{3}$，

所以$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{4\sqrt{2}}{9}$.

14. 考点：利用导数求函数的最值及切线方程

$y=x+1$　【解析】因为$f'(x)=(1-x)e^{-x}$，当$x\in[-1,0]$时$f'(x)>0$，所以$f(x)=xe^{-x}+a$在$[-1,0]$上单调递增，所以$f(x)_{max}=f(0)=a=1$，又$f'(0)=1$，所以切线方程为$y=x+1$.

15. 考点：函数的奇偶性及单调性

【解析】答案不唯一　$y=|x^2-9|$.

16. 考点：直线与圆锥曲线的位置关系

$4\sqrt{3}+2$，$[2+4\sqrt{3},22]$　【解析】依题意得直线方程为$y=2\sqrt{3}$，设点$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，$|MF|+|NF|=y_1+y_2+2=4\sqrt{3}+2$；设直线$l$的方程为$y=kx+b(b>0)$，

带入抛物线方程得$x^2-4kx-4b=0$，则$x_1+x_2=4k$，

则$y_1+y_2=k(x_1+x_2)+2b=4k^2+2b$.

$\because$直线l与该圆相切，$\therefore \frac{b}{\sqrt{k^2+1}}=\sqrt{12}$，即$k^2=\frac{b^2}{12}-1$，又$|MF|=y_1+1$，$|NF|=y_2+1$，$\therefore |MF|+|NF|=y_1+y_2+2=4k^2+2b+2=\frac{1}{3}(b+3)^2-5$，$\because k_{OA}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，$k_{OB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore$分别过$A$、$B$的圆的切线的斜率为$\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}$. $\therefore k\in[-\sqrt{2},\sqrt{2}]$，$\therefore 0\leqslant k^2\leqslant2$，$\therefore 0\leqslant\frac{b^2}{12}-1\leqslant2$，$\because b>0$，$\therefore b\in[2\sqrt{3},6]$，所以$|MF|+|NF|$的取值范围为$[2+4\sqrt{3},22]$.

四、解答题

17. 考点：正余弦定理、三角形面积公式、基本不等式

【解析】(1)因为 $\frac{2\sin B}{b}+\cos C=1$，由正弦定理得 $\frac{2\sin C}{c}+\cos C=1$，……1分

又 $c=2\sqrt{3}$，则 $\sin C+\sqrt{3}\cos C=\sqrt{3}$，即 $\sin\left(C+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$。……3分

又 $C+\frac{\pi}{3}\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{4\pi}{3}\right)$，所以 $C+\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$，$C=\frac{\pi}{3}$。……5分

(2)由余弦定理得 $c^2=12=a^2+b^2-ab$。……6分

所以 $c^2=12=a^2+b^2-ab\geq ab$，当 $a=b$ 时 $(ab)_{max}=12$，……8分

所以 $S_{max}=\frac{1}{2}\times12\sin\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$。……10分

18. 考点：等差等比数列的定义、求数列的通项及前 n 项和

【解析】(1)因为 $a_n+a_{n+2}=2a_{n+1}$，$n\in N^*$，所以 $\{a_n\}$ 为等差数列。……1分

又 $a_1=1$，$a_2=3$，所以 $d=2$。……2分

所以 $a_n=1+2(n-1)=2n-1$。……4分

(2)因为 $3S_n=b_{n+1}-1$，则 $3S_{n-1}=b_n-1(n\geq2)$，

两式相减得 $b_{n+1}=4b_n$，即 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=4(n\geq2)$，……6分

又 $3S_1=b_2-1$，$b_1=1$，所以 $b_2=4$。

所以 $\frac{b_2}{b_1}=4$。……7分

所以 $\{b_n\}$ 为以 1 为首项 4 为公比的等比数列，

所以 $b_n=4^{n-1}$。……8分

所以 $c_n=\frac{1}{(2n-1)(\log_2 4^{n-1}+3)}=\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$。……10分

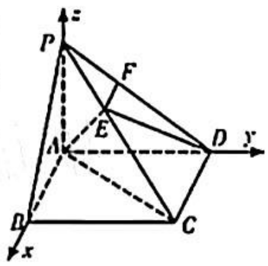
所以 $T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$。……12分

19.【解析】(1)证明：由 $PE\cdot FD=PF\cdot EC$，得 $\frac{PE}{EC}=\frac{PF}{FD}$，即 $EF/\!/CD$。……2分

$\because PA\perp$ 底面 $ABCD$，$\therefore PA\perp CD$，又 $CD\perp AD$，且 $PA\cap AD=A$，PA，$AD\subset$ 平面 PAD，

$\therefore CD\perp$ 平面 PAD，即 $EF\perp$ 平面 PAD。……4分

(2)由 $PA\perp$ 底面 $ABCD$，得 PC 与底面 $ABCD$ 所成角即为 $\angle PCA$，$\therefore\sin\angle PCA=\frac{3}{5}$，不妨设 $PA=3$，则 $PC=5$，$AC=4$，$AB=BC=2\sqrt{2}$，以 A 为原点，以 AB 所在直线为 x 轴，以 AD 所在直线为 y 轴，以 AP 所在直线为 z 轴，建立如图所示空间直角坐标系，



有 $A(0,0,0)$，$B(2\sqrt{2},0,0)$，$D(0,2\sqrt{2},0)$，$E\left(\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3},2\right)$。

$\therefore\overrightarrow{AE}=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3},\frac{2\sqrt{2}}{3},2\right)$，$\overrightarrow{AD}=(0,2\sqrt{2},0)$。……6分

设平面 ADE 的一个法向量为 $n=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{AE}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{AD}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{2\sqrt{2}}{3}x+\frac{2\sqrt{2}}{3}y+2z=0,\\ 2\sqrt{2}y=0,\end{cases}$ 令 $x=\sqrt{2}$，则 $z=-\frac{2}{3}$。

$\therefore n=\left(\sqrt{2},0,-\frac{2}{3}\right)$。……8分

又 $BD\perp$ 平面 ACE，而 $\overrightarrow{BD}=(-2\sqrt{2},2\sqrt{2},0)$，

∴平面 ACE 的一个法向量 $m=(-1,1,0)$，……………………………………………… 10分

$\cos\langle m,n\rangle=\dfrac{m\cdot n}{|m|\cdot|n|}=-\dfrac{3\sqrt{22}}{22}$.

由图可知该二面角为锐二面角，则二面角 $C-AE-D$ 的余弦值为 $\dfrac{3\sqrt{22}}{22}$. ………………………… 12分

20. 考点：统计图表与随机变量分布列问题

【解析】(1)平均值 $=125\times0.04+135\times0.12+145\times0.64+155\times0.2=145$，……………………… 2分

∵$0.04+0.12<0.5$ 且 $0.04+0.12+0.64>0.5$.

∴设中位数为 $140+x$，则 $0.064x=0.34$，解得 $x=5.3125$；所以中位数约为 145. ……………………… 4分

(2)设从国家水稻中心收录的所有稻种中抽取 1 个品种，该品种生育期超过中位数为事件 A.

则 $P(A)=0.5$，……………………………………………………………………………… 6分

依据题意得，X 的可能取值为 3，4，5，………………………………………………………… 7分

$P(X=3)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$. ……………………………………………………………… 8分

$P(X=4)=C_3^1\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{3}{16}$. ………………………………………………………… 9分

$P(X=5)=1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^3-C_3^1\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{11}{16}$. …………………………………………… 10分

随机变量 X 的分布列为：

X	3	4	5
P	$\dfrac{1}{8}$	$\dfrac{3}{16}$	$\dfrac{11}{16}$

$E(X)=\dfrac{73}{16}$. ……………………………………………………………………………… 12分

21.【解析】(1)$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\sqrt{3},\\ c^2=3,\end{cases}$ ……………………………………………………………… 2分

则 $a=1,b=\sqrt{2},c=\sqrt{3}$.

所以双曲线 E 的标准方程为：$x^2-\dfrac{y^2}{2}=1$. ……………………………………………… 4分

(2)设 P 点坐标为 (x_0,y_0)，过 P 与渐近线平行的直线分别为 l_1,l_2，

方程分别为 $y-y_0=\sqrt{2}(x-x_0)$，$y-y_0=-\sqrt{2}(x-x_0)$.

联立方程：$\begin{cases}y-y_0=\sqrt{2}(x-x_0),\\ y=-\sqrt{2}x\end{cases}$，得 $\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{2}x_0-y_0}{2\sqrt{2}},\\ y=\dfrac{\sqrt{2}x_0-y_0}{-2},\end{cases}$ 同理可得：$\begin{cases}y-y_0=-\sqrt{2}(x-x_0),\\ y=\sqrt{2}x.\end{cases}$

得 $\begin{cases}x=\dfrac{\sqrt{2}x_0+y_0}{2\sqrt{2}},\\ y=\dfrac{\sqrt{2}x_0+y_0}{2}.\end{cases}$ ………………………………………………………………… 7分

又渐近线方程为 $y=\pm\sqrt{2}x$，则 $\sin\angle AOB=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$.

$S_{OAPB}^2=OA^2\,OB^2\sin^2\angle AOB=\dfrac{3(\sqrt{2}x_0-y_0)^2}{8}\cdot\dfrac{3(\sqrt{2}x_0+y_0)^2}{8}\cdot\dfrac{8}{9}=\dfrac{(2x_0^2-y_0^2)^2}{8}$，……………… 10分

又点 P 在双曲线上，则 $2x_0^2-y_0^2=2$.

所以 $S_{OAPB}^2=\dfrac{1}{2}$，即平行四边形 $OAPB$ 的面积为定值，

且此定值为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. ……………………………………………………………………………… 12分

22. 考点：利用导数求恒成立问题

【解析】由题意可知，$f(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，$f'(x)=-\ln x+2ax$.

令$f'(x)=0$，可得$2a=\frac{\ln x}{x}$.

令$h(x)=\frac{\ln x}{x}(x>0)$，则由题意可知$y=2a$与函数$h(x)$的图象有两个不同的交点. ………………… 2分

$h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$，令$h'(x)=0$得$x=e$.

可知$h(x)$在$(0,e)$上单调递增，在$(e,+\infty)$上单调递减.

所以$h(x)_{max}=h(e)=\frac{1}{e}$. ……………………………………………………………… 4分

又当$x\to0$时，$h(x)\to-\infty$，当$x\to+\infty$时，$h(x)\to0$.

所以$2a\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$，$a\in\left(0,\frac{1}{2e}\right)$. …………………………………………………………… 5分

(2)当$a=1$时，$f(x)=-x\ln x+x^2+x$.

由$2k(x-2)+f(x)<g(x)$得$2k(x-2)<x\ln x+x$.

因为$x>2$，所以$2k<\frac{x\ln x+x}{x-2}$.

设$F(x)=\frac{x\ln x+x}{x-2}(x>2)$，则$F'(x)=\frac{x-4-2\ln x}{(x-2)^2}$. ……………………………………… 6分

令$m(x)=x-4-2\ln x(x>2)$，则$m'(x)=1-\frac{2}{x}>0$.

所以$m(x)$在$(2,+\infty)$上单调递增. ……………………………………………………… 8分

又$m(8)=4-2\ln 8<4-2\ln e^2=0$，$m(10)=6-2\ln 10>6-2\ln e^3=0$，

所以$m(x)$在$(8,10)$上有唯一的零点x_0，即$x_0-4-2\ln x_0=0$. ………………………………… 10分

当$2<x<x_0$时，$m(x)<0$，即$F'(x)<0$.

当$x>x_0$时，$m(x)>0$，即$F'(x)>0$.

所以$F(x)_{min}=F(x_0)=\frac{x_0\ln x_0+x_0}{x_0-2}=\frac{x_0\left(1+\frac{x_0-4}{2}\right)}{x_0-2}=\frac{x_0}{2}$.

所以$2k<\frac{x_0}{2}$，又$x_0\in(8,10)$，

所以$\frac{x_0}{2}\in(4,5)$，又$k\in\mathbf{N}$，所以k的最大值为2. ………………………………………… 12分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》