巴蜀中学2023届高考适应性月考卷（九）

数学参考答案

一、单项选择题（本大题共8小题，每小题5分，共40分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	D	A	B	C	C	C	D	A

【解析】

1．由 $\frac{x^2}{n-2}+\frac{y^2}{10-n}=1$ 表示椭圆，则 $\begin{cases}n-2>0,\\10-n>0,\\n-2\neq 10-n,\end{cases}$ 可得 $2<n<6$ 或 $6<n<10$，故 $A\cap B=(2,\ 6)\cup(6,\ 8)$，故选D.

2．由题：角 a 终边经过点 $(\sqrt{5},\ -2)$，所以 $\cos a=\frac{\sqrt{5}}{3}$ 代入，得 $\cos 2a=2\cos^2 a-1=\frac{1}{9}$，故选A.

3．对于A，由独立性检验可知，χ^2 值越大，判断"X与Y有关系"的把握性越大，故A错误；对于B，在残差图中，残差点分布的水平带状区域越窄，说明波动越小，即模型的拟合精度越高，故B正确；对于C，样本点都在直线 $y=-2x+3$ 上，说明是负相关，相关系数为 -1，故C错误；对于D，8个数据从小到大排列，由于 $8\times 0.25=2$，所以第25百分位数应该是第二个与第三个的平均数 $\frac{1+2}{2}=\frac{3}{2}$，故D错误，故选B.

4．若 $a_1>0$，且公比 $q>0$，则 $a_n=a_1q^{n-1}>0$，所以对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$S_n>0$ 成立，故必要性成立；若 $a_1>0$，且 $q=-\frac{1}{2}$，则 $S_n=\frac{a_1\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}a_1\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right]=\frac{2}{3}a_1\left[1-(-1)^n\times\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]>0$，所以由对于任意的

$n\in N^*$，$S_n>0$，推不出 $q>0$，故充分性不成立；则“$S_n>0$ 对任意的 $n\in N^*$ 恒成立”是“$q>0$”的必要不充分条件，故选 C.

5．因为 $f(2x+2)$ 为奇函数，所以 $f(2x+2)=-f(-2x+2)$，即有 $f(x+2)=-f(-x+2)$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(2,0)$ 对称．因为 $f(x+1)$ 是偶函数，所以 $f(x+1)=f(-x+1)$，所以函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(x+2)=-f(-x+2)=-f(x)$，所以 $f(x+4)=f(x)$，所以函数的周期为 4，所以 $f(4)=f(0)=f(2)=0$，$f(3)=f(-1)=-f(1)=-f(5)$，无法确定其值，ABD 无法确定，故 C 正确，故选 C.

6．设 $A_1=$“第 1 天去智能餐厅用餐”，$B_1=$“第 1 天去人工餐厅用餐”，$A_2=$“第 2 天去智能餐厅用餐”，则 $\Omega=A_1\cup B_1$，且 A_1 与 B_1 互斥，根据题意得：$P(A_1)=P(B_1)=0.5$，$P(A_2\mid A_1)=0.7$，$P(A_2\mid B_1)=0.8$，由全概率公式则 $P(A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)+P(B_1)P(A_2\mid B_1)=0.5\times0.7+0.5\times0.8=0.75$，故选 C.

7．$f(x)=x-et\ln x=0$ 等价于 $\frac{t\ln x}{x}=\frac{1}{e}$，所以 $\frac{t\ln x_1}{x_1}=\frac{t\ln(2x_1)}{2x_1}=\frac{1}{e}$，由 $\frac{t\ln x_1}{x_1}=\frac{t\ln(2x_1)}{2x_1}$，解得 $x_1=2$，所以 $\frac{t\ln 2}{2}=\frac{1}{e}$，即 $t=\frac{2}{e\ln 2}$，故选 D.

8．抛物线的焦点坐标为 $(1,0)$，设斜率为 k 的直线方程为 $y=k(x-1)$，设 $A(x_A,y_A)$，$D(x_D,y_D)$，直线与抛物线联立 $\begin{cases}y=k(x-1),\\ y^2=4x,\end{cases}$ 得 $k^2x^2-(2k^2+4)x+k^2=0$，所以 $x_A+x_D=\frac{2k^2+4}{k^2}$ ①，$x_Ax_D=1$ ②，所以 $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AF}|-1=x_A+1-1=x_A$，$|\overrightarrow{CD}|=|\overrightarrow{DF}|-1=x_D+1-1=x_D$，$\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{CD}$，所以 $x_A=4x_D$ ③，由②③式解得 $x_A=4x_D=2$，代入①式得 $k^2=8$，故选 A.

二、多项选择题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求的，全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分）

题号	9	10	11	12
答案	BD	AC	ABD	BCD

【解析】

9．对于 A，复数不可以比较大小，故 A 错误；对于 B，$z\bar{z}=a^2+b^2\in\mathrm{R}$，故 B 正确；对于 C，$z^2=(a+b\mathrm{i})^2=a^2-b^2+2ab\mathrm{i}$，$|z|^2=a^2+b^2$，$\therefore\ z^2\neq|z|^2$，故 C 错误；对于 D，$|z|=\left|\dfrac{1+5\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right|=\dfrac{|1+5\mathrm{i}|}{|1+\mathrm{i}|}=\dfrac{\sqrt{26}}{\sqrt{2}}=\sqrt{13}$，故 D 正确，故选 BD.

10．对于 A，由线面平行判定定理可知 A 正确；对于 B，$\alpha\perp\gamma$，$\beta\perp\lambda$，则 α 与 β 平行或相交，故 B 错误；对于 C，正确；对于 D，$\alpha\cap\beta=a$，$\beta\cap\gamma=b$，$\alpha\cap\gamma=c$，三条交线平行或交于一点，如图 1，正方体两两相交的三个平面 $ABCD$，平面 ABB_1A_1，平面 ADD_1A_1，平面 $ABCD\cap$平面 $ABB_1A_1=AB$，平面 $ABCD\cap$平面 $ADD_1A_1=AD$，平面 $ABB_1A_1\cap$平面 $ADD_1A_1=AA_1$，但 AB，AD，AA_1 不平行，故 D 错误，故选 AC.

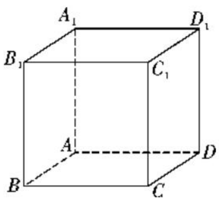

图 1

11．如图 2 所示：对于 A，$\angle PF_1F_2=\angle F_1QP$ 且 $\angle F_1PF_2=\angle QPF_1$，所以 $\triangle PF_1F_2\backsim\triangle PQF_1$，故 A 正确；对于 B，$|PF_1|=2|PF_2|$，$|PF_1|-|PF_2|=2a$，所以 $|PF_1|=2|PF_2|=4a$，又由相似可得：$|PQ|=8a$，$|QF_2|=6a$，$|QF_1|=8a$，$|F_1F_2|=4a=2c$，所以离心率 $e=2$，故 B 正确；对于 C，$\triangle PF_1F_2$ 中，由余弦定理可得 $\cos\angle PF_1F_2=\dfrac{7}{8}$，故 C 错误；对于 D，由 C 可知，$\sin\angle F_1QP=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$，则其面积 $S=4\sqrt{15}a^2$，故 D 正确，故选 ABD.

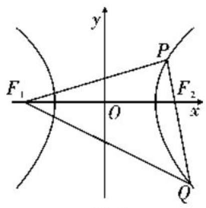

图 2

12．对于选项 ABC，记 $f(x)=\ln x+2x-b$，$f'(x)=\dfrac{1}{x}+2$，所以，$f(x)$ 在 $(x_n, f(x_n))$ 处的切线斜率为 $k_n=\dfrac{1}{x_n}+2$，则 $f(x)$ 在 $(x_n, f(x_n))$ 处的切线方程为 $y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$，即

$y=\frac{1+2x_n}{x_n}x+\ln x_n-b-1$，令 $y=0$，得 $x=\frac{-x_n\ln x_n+(b+1)x_n}{1+2x_n}$，即 $x_{n+1}=\frac{-x_n\ln x_n+(b+1)x_n}{1+2x_n}$，故 A 错误；而对于 B，$x_{n+1}=\frac{-x_n\ln x_n+3x_n}{2x_n+1}=\frac{x_n(3-\ln x_n)}{2x_n+1}$，

$x_{n+1}-1=\frac{x_n\left(1-\ln x_n-\frac{1}{x_n}\right)}{2x_n+1}=\frac{x_n\left(1+\ln\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_n}\right)}{2x_n+1}$，$x_1\in(0,1)$，假设 $x_k\in(0,1)$，则有 $x_{k+1}\in(0,1)$，则由数学归纳法可知，对任意 $n\in N^*$，均有 $x_n\in(0,1)$，故 B 正确；对于 C，$x_{n+1}-x_n=\frac{x_n(2-\ln x_n-2x_n)}{2x_n+1}$，又 $x_n\in(0,1)$，则 $x_{n+1}-x_n>0$，则 $\{x_n\}$ 为递增数列，故 C 正确；对于 D，$f'(x)=2x$，所以 $x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}=x_n-\frac{x_n^2-4}{2x_n}=\frac{x_n^2+4}{2x_n}$，所以

$x_{n+1}+2=\frac{x_n^2+4}{2x_n}+2=\frac{(x_n+2)^2}{2x_n}$，$x_{n+1}-2=\frac{x_n^2+4}{2x_n}-2=\frac{(x_n-2)^2}{2x_n}$，所以 $\frac{x_{n+1}+2}{x_{n+1}-2}=\frac{\frac{(x_n+2)^2}{2x_n}}{\frac{(x_n-2)^2}{2x_n}}$

$=\frac{(x_n+2)^2}{(x_n-2)^2}=\left(\frac{x_n+2}{x_n-2}\right)^2$，所以 $a_{n+1}=\ln\frac{x_{n+1}+2}{x_{n+1}-2}=\ln\left(\frac{x_n+2}{x_n-2}\right)^2=2\ln\frac{x_n+2}{x_n-2}=2a_n$，即 $a_{n+1}=2a_n$，又 $a_1=1$，所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列，故 D 正确，故选 BCD.

三、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

题号	13	14	15	16
答案	4	144	$\frac{1}{8}$	16π；$\frac{12\sqrt{13}}{13}\pi$

【解析】

13．由题 $n=6$，$\left(x-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^6$ 的展开式的通项公式为 $T_{r+1}=C_6^r x^{6-r}\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^r=C_6^r\left(-\frac{1}{2}\right)^r x^{6-\frac{3}{2}r}$，当 $r=0,2,4,6$ 时，展开式的项为有理项，所以有理项有 4 项.

14．第一步：选出 1 个空盒，共 4 种；第二步：4 个小球分为 3 组，共 6 种；第三步：3 组

小球放入 3 个不同的盒子，共 6 种；则 $N=4\times6\times6=144$．

15．$|\vec{a}+2\vec{b}|=3$，则 $9=|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}\geqslant 4|\vec{a}||\vec{b}|+4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle\geqslant 8(1+\cos\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle)$，所以 $\cos\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle_{\max}=\frac{1}{8}$．

16．(1) 以 MCN 所在的平面建立直角坐标系，MN 为 x 轴，MN 的垂直平分线为 y 轴，由球半径为 3 且 $\angle MCN=\frac{\pi}{3}$，可得 $|MN|=3$，则 $M\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$，$N\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$，设 $P(x,\ y)$，$|PM|=2|PN|$，则 $\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+y^2=4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+4y^2$，可得 $\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+y^2=4$，故点 P 的轨迹是以 $T\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$ 为圆心，半径 $r=2$ 的圆，转化到空间中：当 P 绕 MN 为轴旋转一周时，$|PM|$，$|PN|$ 不变，故空间中 P 的轨迹为以 T 为球心，半径为 $r=2$ 的球，所以其表面积为 16π；

(2) 由 (1) 可知点 Q 的轨迹即为球 C 与 (1) 问中阿氏球的交线，两球的交线为圆，又该阿氏球球心为 T，利用 C，T 在 (1) 中的坐标 $T\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$，$C\left(0,\ \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$，则球心距为 $|CT|=\sqrt{13}$，三角形 QTC 为直角三角形，对应圆半径 $r_1=\frac{2\times3}{\sqrt{13}}=\frac{6\sqrt{13}}{13}$，周长即为轨迹长 $2\pi r_1=2\pi\times\frac{6\sqrt{13}}{13}=\frac{12\sqrt{13}}{13}\pi$．

四、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 10 分）

解：(1) 由已知 $\{a_n\}$ 为等差数列，记其公差为 d．

①当 $n\geqslant 2$ 时，$\begin{cases}a_{n+1}=2a_n-n,\\ a_n=2a_{n-1}-(n-1),\end{cases}$

两式相减可得 $d=2d-1$，

解得 $d=1$，

②当 $n=1$ 时，$a_2=2a_1-1$，所以 $a_1=2$．

则 $a_n = 2 + (n-1)\times 1 = n+1$. ………………………………………… (5 分)

(2) 由 (1) 知 $b_n = (-1)^n a_n = (-1)^n (n+1)$,

$$\sum_{i=1}^{2n} b_i = b_1 + b_2 + \cdots + b_{2n-1} + b_{2n}$$

$$= -2 + 3 - 4 + 5 - \cdots - 2n + 2n + 1 = (-2+3) + (-4+5) + \cdots + (-2n+2n+1) = n.$$

……………………………………………………………………… (10 分)

18. (本小题满分 12 分)

解: (1) 若选①: $b - c\left(1 - 2\sin^2\dfrac{A}{2}\right) = \dfrac{a}{2}$,

由正弦定理得, 即: $\sin B - \sin C\left(1 - 2\sin^2\dfrac{A}{2}\right) = \dfrac{\sin A}{2}$,

$\because$ $1 - 2\sin^2\dfrac{A}{2} = \cos A$, $\therefore$ $\sin B - \sin C\cos A = \dfrac{1}{2}\sin A$,

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $B = \pi - (A + C)$,

$\therefore$ $\sin(A + C) - \cos A\sin C = \dfrac{1}{2}\sin A$,

化简得: $\sin A\cos C = \dfrac{1}{2}\sin A$,

$\because$ $\sin A \neq 0$, $\therefore$ $\cos C = \dfrac{1}{2}$,

$\therefore$ $C = \dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………………………………… (6 分)

若选②: $\sqrt{3}c\cos A + c\sin A = \sqrt{3}b$,

由正弦定理得, $\sqrt{3}\sin C\cos A + \sin C\sin A = \sqrt{3}\sin B$,

$\because$ 在$\triangle ABC$中，$B=\pi-(A+C)$，

$\therefore$ $\sqrt{3}\sin C\cos A+\sin C\sin A=\sqrt{3}\sin(A+C)$，

即 $\sin A\sin C=\sqrt{3}\sin A\cos C$，

$\because$ $\sin A\neq 0$，$\therefore$ $\tan C=\sqrt{3}$，故$C=\dfrac{\pi}{3}$. ……………………………………………（6 分）

（2）由角平分线定理：$\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AD}{BD}=\dfrac{2}{1}$，设$BC=t$，$AC=2t$，…………………（8 分）

由（1）知 $C=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\angle ACD=\angle BCD=\dfrac{\pi}{6}$，

$\because$ $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle BCD}$，

即 $\dfrac{1}{2}\times 2t^2\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}\times 4t\times\sin\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}\times 2t\times\sin\dfrac{\pi}{6}$，……………………………（10 分）

化简得 $t^2-\sqrt{3}t=0$，

故 $t=0$（舍去），或 $t=\sqrt{3}$，

故 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}\times 2t^2\times\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. ……………………………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

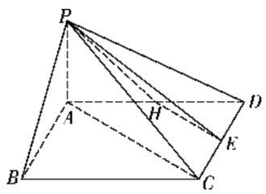

图 3

解：(1) 如图 3，取 AD 的中点 H，连接 EH，PH，设 $PA=t$，

$\because$ H，E 分别为 AD，CD 的中点，

$\therefore$ $HE /\!/ AC$，

$\therefore$ 异面直线 PE 与 AC 所成角即为 $\angle PEH$，…………………………（1 分）

又$\because$ $ABCD$ 为菱形，$\angle BAD=120°$，$AB=2$，

$\therefore$ $AC=2$，$AE=\sqrt{3}$，

$\because$ $PA\perp$ 底面 $ABCD$，

$\therefore$ $EH=\dfrac{1}{2}AC=1$，$PE=\sqrt{t^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{t^2+3}$，$PH=\sqrt{t^2+1}$，

$\therefore \cos\angle PEH=\dfrac{PE^2+EH^2-PH^2}{2PE\cdot EH}=\dfrac{t^2+3+1-(t^2+1)}{2\sqrt{t^2+3}\cdot 1}=\dfrac{3}{4}$，

……………………………………………………………………………（3 分）

解得 $t=1$ 或者 $t=-1$（舍），即 $PA=1$.　　……………………………（6 分）

(2) 如图 4，取 BC 的中点 F，$\because$ $\triangle ABC$ 为等边三角形，

$\therefore$ $AF\perp BC$，又$\because$ $PA\perp$底面 $ABCD$，

如图以 A 为原点，分别以 $\overrightarrow{AF}$，$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{AP}$ 为 x，y，z 轴建立空间直角坐标系，

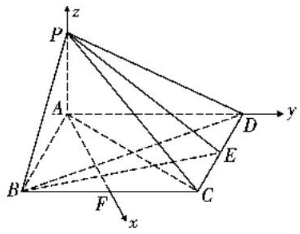

图 4

$\therefore$ $A(0,0,0)$，$P(0,0,1)$，$B(\sqrt{3},-1,0)$，$C(\sqrt{3},1,0)$，

$D(0,2,0)$，$E\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},0\right)$，

$\therefore$ $\overrightarrow{PE}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{3}{2},-1\right)$，$\overrightarrow{PD}=(0,2,-1)$　$\therefore$ $\overrightarrow{PB}=(\sqrt{3},-1,-1)$，

……………………………………………………………………（8 分）

设平面 PBD 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

$\therefore$ $\vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{PD}=0$，

即 $\sqrt{3}x-y-z=0$，$2y-z=0$，

不妨令 $x=\sqrt{3}$，得：$y=1$，$z=2$，$\therefore$ $\vec{n}=(\sqrt{3},1,2)$，　……………………（10 分）

$\therefore$ PE 与平面 PBD 所成角 θ 的正弦值为

$\sin\theta=|\cos\langle\vec{n},\overrightarrow{PE}\rangle|=\left|\dfrac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{PE}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{PE}|}\right|=\left|\dfrac{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-2}{2\sqrt{2}\cdot 2}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{8}$.　……………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

解：(1) 该校中“学习积极分子”的人数为

$100\times(10\times0.028+10\times0.020+10\times0.012)=60$（人），　……………………（2 分）

平均数为

$10\times(95\times0.006+105\times0.014+115\times0.02+125\times0.028+135\times0.02+145\times0.012)=122.8(\text{min})$.

………………………………………………………………（4 分）

（2）由题意得：$X\sim N(122.8,\ 10.8)$，

$P(101.2<X<133.6)=P(122.8-21.6<X<122.8+10.8)$

$=P(122.8-10.8\times2<X<122.8+10.8)=P(\mu-2\sigma<X<\mu+\sigma)$

$=P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)-\dfrac{P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)-P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)}{2}$

$\approx0.9545-\dfrac{0.9545-0.6827}{2}=0.8186$. ………………………………………（8 分）

（3）$P(X\geqslant130)=0.02\times10+0.012\times10=0.32$，

由题意得：$Y\sim B(3,\ 0.32)$，

$\therefore\ E(Y)=3\times0.32=0.96$. …………………………………………………（12 分）

21．（本小题满分 12 分）

解：（1）由题意得$\begin{cases}\dfrac{c}{a}=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\\ \dfrac{(-1)^2}{a^2}+\dfrac{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}{b^2}=1,\\ a^2=b^2+c^2,\end{cases}$ 解得 $a=\sqrt{2}$，$b=1$，$c=1$，

所以椭圆 C 的标准方程为 $\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$. …………………………（4 分）

（2）由（1）知 $A(0,\ 1)$，$B(0,\ -1)$，由于直线 CD 斜率为零与斜率不存在均不符合题意，

故设该直线方程为 $y=k(x+1)(k\neq0)$.

从而 M 坐标为 $(0,\ k)$，设 $C(x_1,\ y_1)$，$D(x_2,\ y_2)$，

联立$\begin{cases}y=k(x+1),\\ \dfrac{x^2}{2}+y^2=1,\end{cases}$ 得 $(2k^2+1)x^2+4k^2x+2k^2-2=0$，

□■■□□□■

所以 $x_1+x_2=\dfrac{-4k^2}{2k^2+1}$，$x_1x_2=\dfrac{2k^2-2}{2k^2+1}$，从而$\dfrac{x_1x_2}{x_1+x_2}=\dfrac{1-k^2}{2k^2}$， ……………（6 分）

现设 $N(x_0,\ y_0)$，因为 B，N，C 三点共线，故$\dfrac{y_1+1}{x_1}=\dfrac{y_0+1}{x_0}$，

因为 A，N，D 三点共线，故$\dfrac{y_2-1}{x_2}=\dfrac{y_0-1}{x_0}$，两式两边作比得： …………………（8 分）

$$\frac{y_0+1}{y_0-1}=\frac{y_1x_2+x_2}{y_2x_1-x_1}=\frac{kx_1x_2+kx_2+x_2}{kx_1x_2+kx_1-x_1}$$

$$=\frac{k\cdot\dfrac{1-k^2}{2k^2}(x_1+x_2)+(k+1)x_2}{k\cdot\dfrac{1-k^2}{2k^2}(x_1+x_2)+(k-1)x_1}=\frac{\dfrac{1-k^2}{2k}x_1+\dfrac{(k+1)^2}{2k}x_2}{\dfrac{(k-1)^2}{2k}x_1+\dfrac{1-k^2}{2k}x_2}$$

$$=\frac{\dfrac{1+k}{2k}[(1-k)x_1+(k+1)x_2]}{\dfrac{1-k}{2k}[(1-k)x_1+(k+1)x_2]}=\frac{1+k}{1-k}=\frac{\dfrac{1}{k}+1}{\dfrac{1}{k}-1},$$

所以 $y_0=\dfrac{1}{k}$，从而$N\left(x_0,\ \dfrac{1}{k}\right)$，又$M(0,\ k)$，

故 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0+1=1$． ………………………………………………………（12 分）

22．（本小题满分 12 分）

解：（1）由题 $f'(x)=\mathrm{e}^x-a$，

若 $a\leqslant 0$，则 $f'(x)>0$ 恒成立，此时 $f(x)$ 在 R 上单调递增，

若 $a>0$，则令 $f'(x)=0$，则 $x=\ln a$，

当 $x\in(-\infty,\ \ln a)$时，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 在$(-\infty,\ \ln a)$ 上单调递减，

当 $x\in(\ln a,\ +\infty)$时，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 在$(\ln a,\ +\infty)$ 上单调递增． ………………（2 分）

（2）（i）由题：$\begin{cases}f(0)=0,\\ f'(0)=0,\end{cases}$ 则$\begin{cases}1+b=0,\\ 1-a=0,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a=1,\\ b=-1.\end{cases}$

故 $f(x)=\mathrm{e}^x-x-1$，因为 $f'(x)=\mathrm{e}^x-1$，

易知 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上单调递减，$(0, +\infty)$ 上单调递增，

所以 $f(x)_{min} = f(0) = 0$，即 $f(x) \geqslant 0$ 恒成立. .... (4 分)

(ii) 由 $f(x) = kx\sin x$，即 $f(x) - kx\sin x = 0$，

令 $g(x) = e^x - x - 1 - kx\sin x$，$x \in (0, \pi)$，

所以 $g'(x) = e^x - 1 - k(\sin x + x\cos x)$，

记 $h(x) = e^x - 1 - k(\sin x + x\cos x)$，$x \in (0, \pi)$，

故 $h'(x) = e^x - 2k\cos x + kx\sin x$，

所以 $h'(0) = 1 - 2k$.

①当 $k > \frac{1}{2}$ 时，

1) 当 $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 时，$h''(x) = e^x + 3k\sin x + kx\cos x > 0$，

$\therefore$ $h'(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递增，又 $h'(0) = 1 - 2k < 0$，$h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{2}k > 0$，

$\therefore$ $\exists$唯一实数 $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$，使得 $h'(x_0) = 0$，

2) 当 $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 时，$h'(x) = e^x - k(2\cos x - x\sin x) > 0$，

由 1)，2) $x \in (0, x_0)$，$h'(x) < 0 \to h(x)\downarrow$，$x \in (x_0, \pi)$，$h'(x) > 0 \to h(x)\uparrow$，

又 $h(0) = 0$，$h(\pi) = e^{\pi} + k\pi - 1 > 0$，

$\therefore$ $\exists x_1 \in (x_0, \pi)$，有 $h(x_1) = 0$，

且当 $x \in (x_0, x_1)$，$h(x) = g'(x) < 0$，$g(x)\downarrow$，$x \in (x_1, \pi)$，$h(x) = g'(x) > 0$，$g(x)\uparrow$，

又 $g(0) = 0$，$g(\pi) = e^{\pi} - \pi - 1 > 0$，

$\therefore$ 存在唯一实数 $x_2 \in (x_1, \pi)$，使得 $g(x_2) = 0$，满足题意. .... (8 分)

②当 $k \leqslant \frac{1}{2}$ 时，

法一：易证 $\sin x < x$ 在 $(0, \pi)$ 上恒成立，

$\therefore$ $x\in(0,\pi)$ 时，$g(x)=e^x-x-1-kx\sin x\geqslant e^x-x-1-\frac{1}{2}x\sin x>e^x-x-1-\frac{1}{2}x^2$，

记 $\varphi(x)=e^x-x-1-\frac{1}{2}x^2$，$x\in(0,\pi)$，

则 $\varphi'(x)=e^x-1-x$，由（i）可知，$\varphi'(x)>0$，$\therefore$ $\varphi(x)$ 在 $(0,\pi)\uparrow$，

$\therefore$ $\varphi(x)>\varphi(0)=0$，即 $g(x)>0$ 恒成立，

$\therefore$ $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上不存在零点，不满足.

法二：$x\in(0,\pi)$ 时，$g(x)=e^x-x-1-kx\sin x\geqslant e^x-x-1-\frac{1}{2}x\sin x$，

取 $F(x)=e^x-x-1-\frac{1}{2}x\cdot\sin x$，则 $F'(x)=e^x-1-\frac{1}{2}(\sin x+x\cos x)$，

$\therefore$ $F''(x)=e^x-\cos x+\frac{1}{2}x\cdot\sin x>e^0-\cos 0+\frac{1}{2}x\cdot\sin x>0$，

$\therefore$ $F'(x)$ 在 $(0,\pi)\uparrow$，$\therefore$ $F'(x)>F'(0)=0$，$\therefore$ $F(x)$ 在 $(0,\pi)\uparrow$，

$\therefore$ $F(x)>F(0)=0$，即有 $g(x)\geqslant F(x)>0$，

$\therefore$ $g(x)$ 在 $(0,\pi)$ 上不存在零点，不满足.

综上所述：$k>\frac{1}{2}$. ……………………………………………………………（12 分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。