哈三中 2021—2022 学年度
上学期高三学年期末考试数学（文）答案

一、选择题：（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的）

1-5 A D B C C　　6-10 B B D A A　　11-12 A C

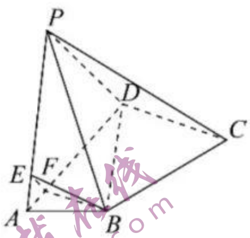
二、填空题：（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13．5　　14．2　　15．$\dfrac{1011}{2023}$　　16．$\dfrac{64\pi}{3}$

三、解答题：（本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17．(1) $\dfrac{\pi}{3}$

(2) $\sqrt{51}+\sqrt{3}$



18．证明：(I) 因为 $AD=4$，$AB=2$，$BD=2\sqrt{3}$，

所以 $AB^2+BD^2=AD^2$，$AB\perp BD$，且 $\angle ADB=30^\circ$．

又 $\triangle BCD$ 是等边三角形，所以 $\angle ADC=90^\circ$，即 $CD\perp AD$，

因为平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD$，平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD$，

$CD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $CD\perp$ 平面 PAD．所以 $CD\perp PA$．

(II) 因为平面 $BEF//$ 平面 PCD，

所以 $BF//CD$，$EF//PD$，且 $BF\perp AD$．

又在直角三角形 ABD 中，$DF=2\sqrt{3}\cos 30^\circ=3$，所以 $AE=AF=1$．

所以 $S_{四边形PEFD}=\dfrac{1}{2}\times4\times4\times\sin60^\circ-\dfrac{1}{2}\times1\times1\times\sin60^\circ=\dfrac{15\sqrt{3}}{4}$．

由 (I) 知 $CD\perp$ 平面 PAD，

故四棱锥 $C-PEFD$ 的体积 $V=\dfrac{1}{3}S_{四边形PEFD}\cdot CD=\dfrac{15}{2}$．

19．(1) 证明　由已知可得 $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{a_n}{n}+1$，即 $\dfrac{a_{n+1}}{n+1}-\dfrac{a_n}{n}=1$．

所以 $\left\{\dfrac{a_n}{n}\right\}$ 是以 $\dfrac{a_1}{1}=1$ 为首项，1 为公差的等差数列．

(2)解　由(1)得$\frac{a_n}{n}=1+(n-1)\cdot 1=n$，所以 $a_n=n^2$. 从而 $b_n=n\cdot 3^n$.

$S_n=1\cdot 3^1+2\cdot 3^2+3\cdot 3^3+\cdots+n\cdot 3^n$，①

$3S_n=1\cdot 3^2+2\cdot 3^3+\cdots+(n-1)\cdot 3^n+n\cdot 3^{n+1}$. ②

①－②得$-2S_n=3^1+3^2+\cdots+3^n-n\cdot 3^{n+1}$

$=\frac{3\cdot(1-3^n)}{1-3}-n\cdot 3^{n+1}=\frac{(1-2n)\cdot 3^{n+1}-3}{2}$. 所以 $S_n=\frac{(2n-1)\cdot 3^{n+1}+3}{4}$.

20.　(1) ∵椭圆 C 过点$P(1,\frac{\sqrt{2}}{2})$，∴$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{2b^2}=1$①，

∵$\overrightarrow{PF_2}=2\overrightarrow{QO}$，∴$PF_2\perp F_1F_2$，则 c=1，

∴$a^2-b^2=1$，②由①②得 $a^2=2$，$b^2=1$，∴椭圆 C 的方程为$\frac{x^2}{2}+y^2=1$

(2) $\frac{8}{3}$

21.　解：∵$f'(x)=\frac{ax^2-2x+b}{x^2}$，∴$f'(1)=a+b-2$，由$f(1)=a-b$，曲线

$y=f(x)$在$x=1$处的切线过点$(0,2-2a)$，∴$\frac{a-b-(2-2a)}{1-0}=a+b-2$，得$a=b$.

(1) ∵$a+b=\frac{8}{5}$，∴$a=b=\frac{4}{5}$，令$f'(x)=0$，得$2x^2-5x+2=0$，

解得$x=\frac{1}{2}$或 2，∴$f(x)$的极值点为$\frac{1}{2}$或 2.

(2) ∵x_1,x_2是方程$f'(x)=\frac{ax^2-2x+a}{x^2}=0$的两个根，所

$x_1x_2=1, a=\frac{2}{x_1+x_2}=\frac{2x_1}{x_1^2+1}$，∵$\frac{1}{e}<x_1<1$，∴$x_2=\frac{1}{x_1}>1, a>0$，∴$f(x_1)$是函数

$f(x)$的极大值，$f(x_2)$是函数$f(x)$的极小值，

∴要证$|f(x_2)-f(x_1)|<1$，只需$f(x_1)-f(x_2)<1$，

$f(x_1)-f(x_2)=ax_1-\frac{a}{x_1}-2\ln x_1-(ax_2-\frac{a}{x_2}-2\ln x_2)=2(ax_1-\frac{a}{x_1}-2\ln x_1)$

$=4(\frac{x_1^2-1}{x_1^2+1}-\ln x_1)=4(\frac{x_1^2-1}{x_1^2+1}-\frac{1}{2}\ln x_1^2)$

令 $t=x_1^2$，则 $\frac{1}{e^2}<t<1$，设 $h(t)=\frac{t-1}{t+1}-\frac{1}{2}\ln t=1-\frac{2}{t+1}-\frac{1}{2}\ln t$，则 $h'(t)=-\frac{(t-1)^2}{2t(t+1)^2}<0$，

函数 $h(t)$ 在 $(\frac{1}{e^2},1)$ 上单调递减，$\therefore h(t)<h(\frac{1}{e^2})=\frac{2}{e^2+1}$，$\therefore$ $f(x_1)-f(x_2)<4h(\frac{1}{e^2})=\frac{8}{e^2+1}<1$.

22. 解 (1)设 $P(x,y)$，则由条件知 $M\left(\frac{x}{2},\frac{y}{2}\right)$.

由于 M 点在 C_1 上，所以 $\begin{cases}\frac{x}{2}=2\cos\alpha,\\ \frac{y}{2}=2+2\sin\alpha,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}x=4\cos\alpha,\\ y=4+4\sin\alpha.\end{cases}$

从而 C_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=4\cos\alpha,\\ y=4+4\sin\alpha.\end{cases}$ （α 为参数）

(2) 曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho=8\sin\theta$. 射线 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 与 C_1 的交点 A 的极径为 $\rho_1=4\sin\frac{\pi}{3}$，射线 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 与 C_2 的交点 B 的极径为 $\rho_2=8\sin\frac{\pi}{3}$. 所以 $AB=|\rho_2-\rho_1|=2\sqrt{3}$.

23. 解：(1) 不等式 $f(x)<g(x)+a$ 即 $|x-2|<|x+4|$，

两边平方得 $x^2-4x+4<x^2+8x+16$，解得 $x>-1$，

所以原不等式的解集为 $(-1,+\infty)$.

(2) 不等式 $f(x)+g(x)>a^2$ 可化为 $a^2-a<|x-2|+|x+4|$，

又 $|x-2|+|x+4|\ge|(x-2)-(x+4)|=6$，所以 $a^2-a<6$，解得 $-2<a<3$，

所以 a 的取值范围为 $(-2,3)$.

关于我们