



数学

巢湖一中 合肥八中 淮南二中 六安一中 南陵中学 ;
滁州中学 池州一中 阜阳一中 灵璧中学 宿城一中 ;

本试卷分第 I 卷 (选择题) 和第 II 卷 (非选择题) 两部分

第 I 卷 (选择题 共 60 分)

一、选择题 (本题共 8 小题, 每小题 5 分, 共 40 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.)

1. 已知集合 $A = \{x \mid |x-1| \geq 2\}$, $B = \{x \mid x < 4, x \in \mathbf{N}\}$, 则 $(\complement_{\mathbf{R}} A) \cap B =$ ()
A. $\{1, 2\}$ B. $\{0, 1, 2\}$ C. $\{1, 2, 3\}$ D. $\{0, 1, 2, 3\}$
2. 设 $i^{2023} \cdot z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ (i 为虚数单位), 则 $|z-i| =$ ()
A. $\sqrt{2}$ B. 1 C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{1}{2}$
3. 已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的长轴长是短轴长的 2 倍, 则 E 的离心率为 ()
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$
4. 一个盒子中装有 5 个黑球和 4 个白球, 现从中先后无放回的取 2 个球, 记“第一次取得黑球”为事件 A , “第二次取得白球”为事件 B , 则 $P(AB) + P(B|A) =$ ()
A. $\frac{7}{9}$ B. $\frac{2}{3}$ C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{8}{9}$
5. 19 世纪美国天文学家西蒙·纽康在翻阅对数表时, 偶然发现表中以 1 开头的数出现的频率更高. 约半个世纪后, 物理学家本·福特又重新发现这个现象, 从实际生活得出的大量数据中, 以 1 开头的数出现的频数约为总数的三成, 并提出本·福特定律, 即在大量 b 进制随机数据中, 以 n 开头的数出现的概率为 $P_b(n) = \log_b \frac{n+1}{n}$. 如斐波那契数、阶乘数、素数等都比较符合该定律. 后来常有数学爱好者用此定律来检验某些经济数据、选举数据等大数据的真

15 卷 · A10 联盟 2023 届高三联考

2023 届高三数学综合卷

全试题

：舒城中学 太湖中学 天长中学 屯溪一中 宣城中学
合肥六中 太和中学 合肥七中 科大附中 野寨中学

部分。满分150分，考试时间120分钟。请在答题卷上作答。

实性. 若 $\sum_{n=k}^{20} P_{10}(n) = \frac{\log_2 21 - \log_2 3}{1 + \log_2 5}$ ($k \in \mathbf{N}^*$, $k \leq 20$), 则 k 的

值为 ()

- A. 2 B. 3 C. 4 D. 5

6. 已知某圆锥的母线长为3, 则当该圆锥的体积最大时, 其侧面展开图的圆心角的弧度数为 ()

- A. $\frac{2\sqrt{6}}{3}\pi$ B. $\frac{\sqrt{6}}{3}\pi$ C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi$ D. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

7. 某市教育局为了给高考生减压, 将师范大学6名心理学教授全部分配到市属四所重点高中进行心理辅导, 若A高中恰好需要1名心理学教授, B, C, D三所高中各至少需要1名心理学教授, 则不同的分配方案有 ()

- A. 150种 B. 540种 C. 900种 D. 1440种

8. 已知实数 $a, b, c \in (0, 1)$, 且 $a = 2022e^{a-2022}$, $b = 2023e^{b-2023}$, $c = 2024e^{c-2024}$, 则 ()

- A. $a < b < c$ B. $c < a < b$ C. $b < c < a$ D. $c < b < a$

二、选择题 (本题共4小题, 每小题5分, 共20分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得5分, 部分选对的得2分, 有选错的得0分.)

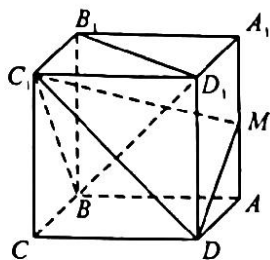
9. 已知直线 l 与曲线 $f(x) = \ln x + x^2$ 相切, 则下列直线中可能与 l 垂直的是 ()

- A. $x + 4y = 0$ B. $\sqrt{2}x + 5y = 0$
C. $\sqrt{2}x + 3y = 0$ D. $\sqrt{2}x - y = 0$

10. 已知 $\odot P: x^2 + (y+3)^2 = 9$, $\odot Q: x^2 + 2x + y^2 + 8y + m = 0$, 点 A, B 分别在 $\odot P, \odot Q$ 上, 则 ()

- A. 若 $\odot Q$ 的半径为1, 则 $m = 16$
B. 若 $m = 13$, 则 $\odot P$ 与 $\odot Q$ 相交弦所在的直线为 $2x + 2y - 13 = 0$
C. 直线 $l: ax - y - a - 2 = 0$ 截 $\odot P$ 所得的最短弦长为 $2\sqrt{7}$
D. 若 $|AB|$ 的最小值为 $2 - \sqrt{2}$, 则 $|AB|$ 的最大值为 $2 + \sqrt{2}$

11. 如图, 在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 为棱 AA_1 上的动点(不含端点), 下列选项正确的是 ()



- A. 当 $AM = \frac{1}{2}AA_1$ 时, $BD_1 \perp$ 平面 DMC_1
- B. 平面 DMC_1 与平面 AA_1B_1B 的交线垂直于 BD_1
- C. 直线 BC_1, B_1D_1 与平面 DMC_1 所成角相等
- D. 点 A_1 在平面 DMC_1 内的射影在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的内部
12. 已知函数 $f(x) = 2|\sin x + \cos x| - \sin 2x$, 则 ()
- A. $f(x)$ 的最小正周期为 2π
- B. $x = \frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 图象的一条对称轴
- C. $f(x)$ 的最小值为 1
- D. $f(x)$ 在 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 上单调递增

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

三、填空题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.)

13. 定义在 \mathbf{R} 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(x+1) = 2f(x)$, 当 $x \in (-1, 0]$ 时, $f(x) = x^3$, 则 $f(\frac{21}{2}) =$ _____.
14. 已知向量 $a = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2})$, $|b| = 2$, $|2a - b| = \sqrt{6}$, 则 $a \cdot b =$ _____; b 在 a 上的投影向量的坐标为 _____.
15. 已知函数 $f(x) = e^x + 2x$, $g(x) = 4x$, 且 $f(m) = g(n)$, 则 $|n - m|$ 的最小值为 _____.
16. 已知抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 和直线 $l: x = \lambda (\lambda > 0)$, 点 H 是直线 l 上的动点 (不在 x 轴上), 以点 H 为圆心且过原点 O 的圆与直线 l 交于 M, N 两点, 若直线 OM, ON 与 E 的另一个交点

分别为 P, Q , 记直线 PQ, OH 的斜率分别为 k_1, k_2 , 则 $k_1 \cdot k_2 =$

四、解答题 (本题共 6 小题, 第 17 题 10 分, 第 18~22 题每题 12 分, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本小题满分 10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 满足: $a_1 = 3, a_2 = 6, a_3 = 11$, 从第二项开始, 每一项与前一项的差构成等差数列.

(1) 求 a_n ;

(2) 设 $b_n = \frac{a_n}{3\sqrt{a_n-2}}$, 若 $b_n \leq m$ 恒成立, 求 m 的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

从条件① $b - c \cos A = a(\sqrt{3} \sin C - 1)$;

② $\sin(A+B) \cos\left(C - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$ 中任选一个, 补充在下面问题中,

并加以解答.

在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , _____.

(1) 求角 C 的大小;

(2) 设 D 为边 AB 的中点, 求 $\frac{CD^2}{a^2 + b^2}$ 的最大值.

注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.

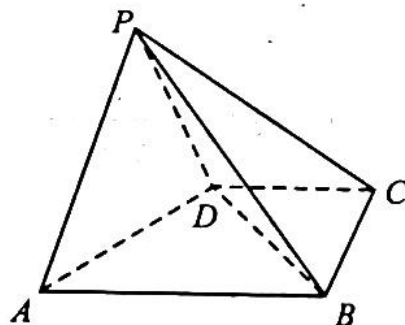


19. (本小题满分 12 分)

如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$, $AB = 4$, $BC = DC = 2$, $PA = PD$, 二面角 $P-AD-B$ 为直二面角.

(1) 求证: $PA \perp BD$;

(2) 若直线 PB 与平面 PAD 所成角的正切值为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 求平面 PAD 与平面 PBC 的夹角的余弦值.



20. (本小题满分 12 分)

21

纯电动汽车、混合动力汽车及燃料电池电动汽车均为新能源汽车，近几年某地区新能源汽车保有量呈快速增长的态势，下表为 2018~2022 年该地区新能源汽车及纯电动汽车的保有量（单位：万辆），其中 2018~2022 年对应的年份编号依次为 1~5：

年份编号 x	1	2	3	4	5
该地区新能源汽车保有量 y	1.5	2.6	3.4	4.9	7.8
该地区纯电动汽车保有量 z	1.3	2.1	2.8	4.0	6.4

- (1) 由上表数据可知，可用指数函数模型 $y = a \cdot b^x$ 拟合 y 与 x 的关系，请建立 y 关于 x 的回归方程（ a, b 的值精确到 0.1），并预测 2023 年该地区新能源汽车保有量能否超过 10 万辆；
- (2) 从表中数据可以看出 2018~2022 年，该地区新能源汽车保有量中纯电动汽车保有量占比均超过 80%，说明纯电动汽车一直是新能源汽车的主流产品。若甲、乙、丙 3 人从 2018~2022 年中各随机选取 1 个年份（可以重复选取），记取到满足 $y - z > 0.8$ 的年份的个数为 X ，求 X 的分布列及数学期望。

参考数据：

\bar{v}	$\sum_{i=1}^5 x_i v_i$	$e^{0.089}$	$e^{0.387}$	1.5^6
1.25	22.62	1.1	1.5	11.4

其中 $v_i = \ln y_i, \bar{v} = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 v_i$.

参考公式：对一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$ ，其回归直线 $\hat{v} = \hat{a} + \hat{\beta}u$ 的斜率和截距的最小二乘法估计公式分别为

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n u_i v_i - n\bar{u}\bar{v}}{\sum_{i=1}^n u_i^2 - n\bar{u}^2}, \quad \hat{a} = \bar{v} - \hat{\beta}\bar{u}.$$

21. (本小题满分 12 分)

已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 过 $(3, 4\sqrt{2})$ 和 $(\sqrt{2}, 2)$

两点, 点 A 为 C 的右顶点.

(1) 求 C 的方程;

(2) 过点 $P(\sqrt{5}, 0)$ 作斜率不为 0 的直线 l 与 C 交于点 M, N , 直线 $x = \sqrt{5}$ 分别交直线 AM, AN 于 E, F . 试探究以 EF 为直径的圆是否经过定点, 若过定点, 请求出所有定点坐标; 若不过定点, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = (x-2)e^x + ax + 2, a \in \mathbb{R}$.

(1) 当 $x \in [0, +\infty)$ 时, $f(x) \geq 0$ 恒成立, 求 a 的取值范围;

(2) 求证: 对一切的 $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln \sqrt{n+1} > \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1}$.



1号卷·A10联盟2023届高考最后一卷

数学参考答案

一、选择题（本题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	C	D	A	B	A	C	D

- B 由题意得, $A = \{x | x-1 \geq 2 \text{ 或 } x-1 \leq -2\} = \{x | x \geq 3 \text{ 或 } x \leq -1\}$, $\therefore \complement_{\mathbb{R}} A = \{x | -1 < x < 3\}$, 又 $B = \{0, 1, 2, 3\}$, 则 $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cap B = \{0, 1, 2\}$, 故选 B.
- C $z = \frac{1-i}{2} \cdot \frac{1-i}{-i} = \frac{1-i}{2} \cdot \frac{1-i}{-i} = \frac{1-i}{2} \cdot \frac{1-i}{-i} = \frac{1-i}{2} \cdot \frac{1-i}{-i} = \frac{1-i}{2} \cdot \frac{1-i}{-i} = \frac{1-i}{2} \cdot \frac{1-i}{-i}$, $\therefore z-i = \frac{1-i}{2} - i = \frac{1-i-2i}{2} = \frac{1-3i}{2}$, $\therefore |z-i| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$. 故选 C.
- D 由题意得, $a = 2b$, $\therefore e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选 D.
- A $\because P(AB) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} = \frac{5}{18}$, $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{1}{2}$, $\therefore P(AB) + P(B|A) = \frac{7}{9}$. 故选 A.
- B $\sum_{n=k}^{20} P_{10}(n) = P_{10}(k) + P_{10}(k+1) + \dots + P_{10}(20) = \lg \frac{k+1}{k} + \lg \frac{k+2}{k+1} + \dots + \lg \frac{21}{20} = \lg \frac{21}{k}$,
又 $\frac{\log_2 21 - \log_2 3}{1 + \log_2 5} = \frac{\log_2 7}{\log_2 10} = \lg 7$, 故 $k = 3$. 故选 B.
- A 设圆锥的底面半径为 r , 高为 h , 则 $r^2 + h^2 = 9$, $0 < h < 3$, 体积 $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h = \frac{1}{3} \pi (9h - h^3)$,
则 $V' = \pi (3 - h^2) = \pi (\sqrt{3} - h)(\sqrt{3} + h)$, 故当 $h \in (0, \sqrt{3})$ 时, V 单调递增, 当 $h \in (\sqrt{3}, 3)$ 时, V 单调递减, \therefore 当 $h = \sqrt{3}$ 时, V 取得最大值, 此时 $r = \sqrt{6}$, 侧面展开图的圆心角 $\alpha = \frac{2\pi r}{l} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \pi$.
故选 A.
- C 先从6名教授中任选1名教授到A高中, 有 $C_6^1 = 6$ 种不同的方法, 再将其余5名教授分配到B, C, D三所高中, 可分两类: ① B, C, D三所高中有一所高中分1名教授, 另外两所高中各分2名教授, 有 $\frac{C_3^1 C_4^2 C_2^2}{A_2^2} \cdot A_3^3 = 90$ 种方法; ② B, C, D三所高中有一个高中分3名教授, 另两个高中各分1名教授, 有 $\frac{C_3^3 C_2^1 C_1^1}{A_2^2} \cdot A_3^3 = 60$ 种不同的方法, \therefore 不同的分配方案共有 $6 \times (90 + 60) = 900$ 种. 故选 C.
- D 由 $a = 2022e^{a-2022}$, $b = 2023e^{b-2023}$, $c = 2024e^{c-2024}$, 可得 $\frac{e^a}{a} = \frac{e^{2022}}{2022}$, $\frac{e^b}{b} = \frac{e^{2023}}{2023}$,
 $\frac{e^c}{c} = \frac{e^{2024}}{2024}$. 令 $f(x) = \frac{e^x}{x}$, 则 $f'(x) = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, \therefore 当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减, 当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增,
 $\therefore \frac{e^{2022}}{2022} < \frac{e^{2023}}{2023} < \frac{e^{2024}}{2024}$, $\therefore \frac{e^a}{a} < \frac{e^b}{b} < \frac{e^c}{c}$, 又 $\because a, b, c \in (0, 1)$, $\therefore c < b < a$. 故选 D.

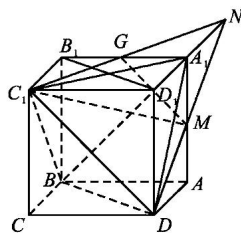
二、选择题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。）

题号	9	10	11	12
答案	AB	AC	BC	BCD

9. AB $\because f'(x) = \frac{1}{x} + 2x \geq 2\sqrt{2}$ ，即直线 l 的斜率 $k \geq 2\sqrt{2}$ ，设与 l 垂直的直线的斜率为 m ，则 $km = -1$ ，
 $\therefore -\frac{\sqrt{2}}{4} \leq m < 0$ 。故选 AB。

10. AC 由题意得， $\odot P: x^2 + (y+3)^2 = 9$ 的圆心为 $P(0, -3)$ ，半径 $r_1 = 3$ ，
 $\odot Q: (x+1)^2 + (y+4)^2 = 17 - m$ 。若 $\odot Q$ 的半径为 1，则 $17 - m = 1^2$ ，解得 $m = 16$ ，故 A 正确；
 若 $m = 13$ ，则 $\odot Q: x^2 + 2x + y^2 + 8y + 13 = 0$ ，两式相减，得 $\odot P$ 与 $\odot Q$ 相交弦所在的直线为 $2x + 2y + 13 = 0$ ，故 B 错误；易得直线 $l: ax - y - a - 2 = 0$ 过定点 $(1, -2)$ ，且点 $(1, -2)$ 在 $\odot P$ 内，则圆心 $P(0, -3)$ 与点 $(1, -2)$ 的距离为 $\sqrt{2}$ ，则直线 $l: ax - y - a - 2 = 0$ 被 $\odot P$ 所截的最短弦长为 $2\sqrt{3^2 - (\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{7}$ ，故 C 正确；若 $|AB|$ 的最小值为 $2 - \sqrt{2}$ ，则 $\odot P$ 与 $\odot Q$ 内含或外离，由点 $Q(-1, -4)$ 在 $\odot P$ 内，得 $\odot P$ 与 $\odot Q$ 内含，则 $|PQ| = \sqrt{2} < 3 - \sqrt{17 - m}$ ， $|AB|$ 的最小值为 $3 - (\sqrt{2} + \sqrt{17 - m}) = 2 - \sqrt{2}$ ，解得 $m = 16$ ， $\therefore |AB|$ 的最大值为 $6 - (2 - \sqrt{2}) = 4 + \sqrt{2}$ ，故 D 错误。故选 AC。

11. BC 对于 A，连接 A_1C_1 ， A_1D ，易知 $BD_1 \perp$ 平面 A_1C_1D ，而 M 为 AA_1 中点时，平面 A_1C_1D 与平面 DMC_1 不重合，故 A 错误；对于 B，延长 D_1A_1 ， DM 交于 N ，连接 C_1N 交 A_1B_1 于 G ，连接 GM ，则 GM 为平面 DMC_1 与平面 AA_1B_1B 的交线，易知 $GM \parallel C_1D$ ，而 $BD_1 \perp$ 平面 A_1C_1D ， $\therefore BD_1 \perp C_1D$ ， $\therefore BD_1 \perp GM$ ，故 B 正确；对于 C，连接 BD ，则 $BD \parallel B_1D_1$ ，由对称关系可知直线 BC_1 ， BD 与平面 DMC_1 所成角相等， \therefore 直线 BC_1 ， B_1D_1 与平面 DMC_1 所成角也相等，故 C 正确；对于 D，易知二面角 $A_1 - GM - N$ 为锐二面角， \therefore 点 A_1 在平面 DMC_1 内的射影在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的外部，故 D 错误。故选 BC。



12. BCD $\because f(x) = 2|\sin x + \cos x| - \sin 2x$ ， $\therefore f(x + \pi) = 2|\sin(x + \pi) + \cos(x + \pi)| - \sin 2(x + \pi) = 2|\sin x + \cos x| - \sin 2x = f(x)$ ， $\therefore \pi$ 是 $f(x)$ 的周期，故 A 错误；
 $f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2\left|\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right| - \sin 2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 2|\sin x + \cos x| - \sin 2x = f(x)$ ，
 $\therefore x = \frac{\pi}{4}$ 为 $f(x)$ 图象的一条对称轴，故 B 正确；令 $|\sin x + \cos x| = t \in [0, \sqrt{2}]$ ，则有 $\sin 2x = t^2 - 1$ ，则 $y = -t^2 + 2t + 1$ ，在 $[0, 1]$ 上单调递增，在 $[1, \sqrt{2}]$ 上单调递减，当 $t = 0$ 时，函数 $f(x)$ 取得最小值 1，故 C 正确；函数 $f(x)$ 由 $y = -t^2 + 2t + 1$ 和 $t = |\sin x + \cos x|$ 复合而成，

当 $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$ 时, 函数 $t = |\sin x + \cos x| = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$, $\because x + \frac{\pi}{4} \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \right]$,
 \therefore 函数 $t = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$ 上单调递减, 且 $t \in [1, \sqrt{2}]$, 函数 $y = -t^2 + 2t + 1$ 在 $[1, \sqrt{2}]$
 上单调递减, $\therefore f(x)$ 在 $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} \right]$ 上单调递增, 故 D 正确. 故选 BCD.

三、填空题 (本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.)

13. -256

由题意得, $f\left(\frac{21}{2}\right) = -\frac{1}{8} \times 2^{11} = -2^8 = -256$.

14. $\frac{1}{2}; \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right)$

$\because |\mathbf{a}| = 1, |\mathbf{b}| = 2, |\mathbf{2a} - \mathbf{b}| = \sqrt{6}, \therefore \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2}, \therefore \mathbf{b}$ 在 \mathbf{a} 上的投影向量为 $\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{1}{2} \mathbf{a}$, 其坐标
 为 $\left(\frac{\sqrt{3}}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

15. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$

由 $f(m) = g(n)$, 得 $e^m + 2m = 4n$, 化简整理得 $4n - 4m = e^m - 2m$. 令 $h(m) = e^m - 2m (m \in \mathbf{R})$,
 则 $h'(m) = e^m - 2$, 令 $e^m - 2 = 0$, 解得 $m = \ln 2$. 当 $m \in (-\infty, \ln 2)$ 时, $h'(m) < 0$, 即 $h(m)$ 在
 $(-\infty, \ln 2)$ 上单调递减; 当 $m \in (\ln 2, +\infty)$ 时, $h'(m) > 0$, 即 $h(m)$ 在 $(\ln 2, +\infty)$ 上单调递增,

$\therefore h(m)_{\min} = h(\ln 2) = 2 - 2 \ln 2 > 0, \therefore |n - m|_{\min} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$.

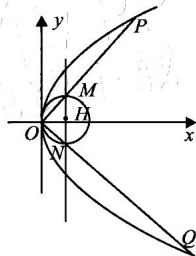
16. $-\frac{1}{2}$

如图, 设直线 OM, ON 的方程分别为 $y = kx, y = mx$, 则 $M(\lambda, k\lambda), N(\lambda, m\lambda)$,

$H\left(\lambda, \frac{\lambda(k+m)}{2}\right), \because \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 0, \therefore \lambda^2 + km\lambda^2 = 0$, 即 $km = -1$. 联立 $\begin{cases} y = kx \\ y^2 = 2px \end{cases}$, 消去 y 得

$k^2 x^2 - 2px = 0, \therefore x_P = \frac{2p}{k^2}, y_P = kx_P = \frac{2p}{k}$, 同理可得 $x_Q = \frac{2p}{m^2}, y_Q = \frac{2p}{m}$,

$\therefore k_1 = \frac{y_P - y_Q}{x_P - x_Q} = \frac{\frac{2p}{k} - \frac{2p}{m}}{\frac{2p}{k^2} - \frac{2p}{m^2}} = \frac{km(m-k)}{m^2 - k^2} = -\frac{1}{k+m}, \because k_2 = \frac{k+m}{2}, \therefore k_1 \cdot k_2 = -\frac{1}{2}$.



四、解答题（本题共6小题，第17题10分，第18~22题每题12分，共70分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。）

17.（本小题满分10分）

(1) 由题意得， $a_2 - a_1 = 3, a_3 - a_2 = 5, \dots$,

\therefore 数列 $\{a_{n+1} - a_n\}$ 是以 $a_2 - a_1 = 3$ 为首项，公差 $d = 2$ 的等差数列，……………1分

$\therefore a_{n+1} - a_n = 3 + 2(n-1) = 2n + 1$ ，……………2分

$\therefore a_2 - a_1 = 3, a_3 - a_2 = 5, a_4 - a_3 = 7, \dots, a_n - a_{n-1} = 2n - 1 (n \geq 2)$ ，

将所有上式累加可得 $a_n - a_1 = 3 + 5 + 7 + \dots + 2n - 1 = n^2 - 1$ ，……………3分

$\therefore a_n = n^2 + 2 (n \geq 2)$ ，……………4分

又 $a_1 = 3$ 也满足上式， $\therefore a_n = n^2 + 2$ ，……………5分

(2) 由(1)得， $b_n = \frac{n^2 + 2}{3^n}$ ，……………6分

$$\begin{aligned} \text{则 } b_{n+1} - b_n &= \frac{(n+1)^2 + 2}{3^{n+1}} - \frac{n^2 + 2}{3^n} = \frac{[(n+1)^2 + 2] - 3(n^2 + 2)}{3^{n+1}} \\ &= \frac{-2n^2 + 2n - 3}{3^{n+1}} = \frac{-2\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{2}}{3^{n+1}} < 0, \dots\dots\dots 8 \text{分} \end{aligned}$$

$\therefore b_{n+1} - b_n < 0$ 恒成立， $\therefore b_n \leq b_1 = 1$ ，……………9分

$\therefore b_n \leq m$ 恒成立， $\therefore m \geq 1$ ，即 m 的取值范围是 $[1, +\infty)$ 。……………10分

18.（本小题满分12分）

(1) 选择条件①：由正弦定理得 $\sin B - \sin C \cos A = \sqrt{3} \sin A \sin C - \sin A$ ，……………1分

即 $\sqrt{3} \sin A \sin C = \sin(A+C) - \sin C \cos A + \sin A = \sin A \cos C + \sin A$ ，……………2分

$\therefore \sin A \neq 0$ ， $\therefore \sqrt{3} \sin C - \cos C = 1$ ，即 $\sin\left(C - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ ，……………4分

又 $0 < C < \pi$ ， $\therefore C - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right)$ ， $\therefore C - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ ，即 $C = \frac{\pi}{3}$ 。……………6分

选择条件②：由 $\sin(A+B) \cos\left(C - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{4}$ ，得 $\sin C \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos C + \frac{1}{2} \sin C\right) = \frac{3}{4}$ ，……………1分

则 $\frac{\sqrt{3}}{2} \sin C \cos C + \frac{1}{2} \sin^2 C = \frac{3}{4}$ ，即 $\frac{\sqrt{3}}{4} \sin 2C + \frac{1}{4} (1 - \cos 2C) = \frac{3}{4}$ ，……………3分

化简得， $\sin\left(2C - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ ，……………4分

$\therefore 2C - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right)$ ， $\therefore 2C - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ ，即 $C = \frac{\pi}{3}$ 。……………6分

(2) $\therefore \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$ ，

$\therefore \overrightarrow{CD}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{CA}^2 + \overrightarrow{CB}^2 + 2\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{4}(b^2 + a^2 + 2ab \cos C) = \frac{1}{4}(b^2 + a^2 + ab)$ ，……………8分

$\therefore \frac{CD^2}{a^2 + b^2} = \frac{b^2 + a^2 + ab}{4(a^2 + b^2)} = \frac{1}{4} + \frac{ab}{4(a^2 + b^2)}$ ， $\therefore a^2 + b^2 \geq 2ab$ ，……………10分

$$\therefore \frac{1}{4} + \frac{ab}{4(a^2+b^2)} \leq \frac{1}{4} + \frac{a^2+b^2}{8(a^2+b^2)} = \frac{3}{8}, \text{ 当且仅当 } a=b \text{ 时取等号,}$$

$$\therefore \frac{CD^2}{a^2+b^2} \text{ 的最大值为 } \frac{3}{8}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. (本小题满分 12 分)

(1) 在 $\text{Rt}\triangle BCD$ 中, $\because BC=CD=2, \therefore \angle DBC=45^\circ, BD=2\sqrt{2}. \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$\because \angle ABC=\angle BCD=90^\circ, \therefore AB\parallel CD, \angle DBA=45^\circ, \therefore AD=2\sqrt{2}, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

则 $AD^2+BD^2=AB^2, \therefore AD\perp BD. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

又二面角 $P-AD-B$ 为直二面角, 即平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD,$

\because 平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD, BD\subset$ 平面 $ABCD, \therefore BD\perp$ 平面 $PAD, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$\because PA\subset$ 平面 $PAD, \therefore BD\perp PA. \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

(2) 由 (1) 知 $BD\perp$ 平面 $PAD,$ 则 $\angle BPD$ 是直线 PB 与平面 PAD 所成角.

$$\therefore \tan \angle BPD = \frac{BD}{PD} = \frac{2\sqrt{2}}{PD} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \therefore PD = \sqrt{10}. \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

分别取 AD, AB 的中点 $O, E,$ 连接 $OP, OE,$ 则 $OE\parallel BD.$

$$\because PA=PD, \therefore PO\perp AD, \therefore PO = \sqrt{PD^2 - OD^2} = \sqrt{10 - 2} = 2\sqrt{2}.$$

又平面 $PAD\perp$ 平面 $ABCD,$ 平面 $PAD\cap$ 平面 $ABCD=AD,$

$\therefore PO\perp$ 平面 $ABCD, \therefore PO\perp OE, \because OE\parallel BD, AD\perp BD, \therefore OE\perp AD. \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

以 O 为坐标原点, OA, OE, OP 所在直线分别为 x, y, z 轴, 建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $P(0, 0, 2\sqrt{2}), D(-\sqrt{2}, 0, 0), B(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0), C(-2\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0), \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

$$\text{则 } \vec{BC} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0), \vec{PB} = (-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -2\sqrt{2}).$$

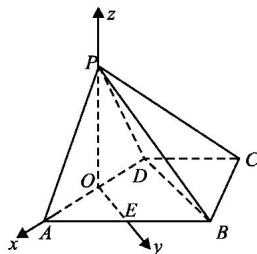
$$\text{设平面 } PBC \text{ 的法向量为 } \mathbf{n} = (x, y, z), \text{ 则 } \begin{cases} \mathbf{n} \cdot \vec{BC} = -\sqrt{2}x - \sqrt{2}y = 0 \\ \mathbf{n} \cdot \vec{PB} = -\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y - 2\sqrt{2}z = 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y + 2z = 0 \end{cases}.$$

$$\text{令 } x=1, \text{ 则 } y=-1, z=-\frac{3}{2}, \therefore \mathbf{n} = \left(1, -1, -\frac{3}{2}\right), \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

显然 $\vec{DB} = (0, 2\sqrt{2}, 0)$ 为平面 PAD 的一个法向量, $\dots\dots\dots 11 \text{ 分}$

$$\text{则 } |\cos \langle \mathbf{n}, \vec{DB} \rangle| = \frac{|\mathbf{n} \cdot \vec{DB}|}{|\mathbf{n}| \cdot |\vec{DB}|} = \frac{1 \times 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{1^2 + (-1)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2}} = \frac{2\sqrt{17}}{17},$$

$$\therefore \text{平面 } PAD \text{ 与平面 } PBC \text{ 的夹角的余弦值为 } \frac{2\sqrt{17}}{17}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$



20. (本小题满分 12 分)

(1) 由 $y = a \cdot b^x$ 得 $\ln y = \ln(ab^x) = \ln a + x \ln b,$

设 $\ln y = v, \therefore v = \ln a + x \ln b, \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

$$\therefore \bar{x} = 3, \bar{v} = 1.25, \sum_{i=1}^5 x_i^2 = 55, \therefore \ln b = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i v_i - 5\bar{x}\bar{v}}{\sum_{i=1}^5 x_i^2 - 5\bar{x}^2} = \frac{22.62 - 5 \times 3 \times 1.25}{55 - 5 \times 3^2} = 0.387. \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

又点 $(3, 1.25)$ 在 $\hat{v} = \ln a + x \ln b$ 上, $\therefore \ln a = 0.089,$ 故 $\hat{v} = 0.089 + 0.387x, \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

$\therefore \ln \hat{y} = 0.089 + 0.387x$, 则 $\hat{y} = e^{0.089+0.387x} = 1.1 \times 1.5^x$,

即 y 关于 x 的回归方程为 $\hat{y} = 1.1 \times 1.5^x$,5分

当 $x=6$ 时, $\hat{y} = 1.1 \times 1.5^6 = 1.1 \times 11.4 = 12.54 > 10$,

\therefore 预测 2023 年该地区新能源汽车保有量能超过 10 万辆.6分

(2) X 的所有可能取值为 0, 1, 2, 3, 易知 2018~2022 年中满足 $y-z > 0.8$ 的年份有 2 个,

则每人取到满足 $y-z > 0.8$ 的年份的概率为 $\frac{2}{5}$, 且有 $X \sim B\left(3, \frac{2}{5}\right)$,8分

$$\therefore P(X=0) = \left(1 - \frac{2}{5}\right)^3 = \frac{27}{125}, P(X=1) = C_3^1 \times \frac{2}{5} \times \left(1 - \frac{2}{5}\right)^2 = \frac{54}{125},$$

$$P(X=2) = C_3^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(1 - \frac{2}{5}\right) = \frac{36}{125}, P(X=3) = C_3^3 \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}, \dots\dots\dots 10分$$

$\therefore X$ 的分布列为

X	0	1	2	3
P	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

$$\therefore E(X) = 3 \times \frac{2}{5} = \frac{6}{5}. \dots\dots\dots 12分$$

21. (本小题满分 12 分)

(1) 由题意得,
$$\begin{cases} \frac{9}{a^2} - \frac{32}{b^2} = 1 \\ \frac{2}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \end{cases}, \dots\dots\dots 2分$$

解得 $\begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases}$, $\therefore C$ 的方程为 $x^2 - \frac{y^2}{4} = 1$4分

(2) 由 (1) 得, $A(1,0)$, 设直线 $l: x = my + \sqrt{5}$, 联立
$$\begin{cases} x^2 - \frac{y^2}{4} = 1 \\ x = my + \sqrt{5} \end{cases},$$

整理得 $(4m^2 - 1)y^2 + 8\sqrt{5}my + 16 = 0$, 且 $4m^2 - 1 \neq 0$,

设 $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$, 则 $y_1 + y_2 = -\frac{8\sqrt{5}m}{4m^2 - 1}$, $y_1 y_2 = \frac{16}{4m^2 - 1}$,5分

而直线 $AM: y = \frac{y_1}{x_1 - 1}(x - 1)$, 令 $x = \sqrt{5}$, 则 $y = \frac{y_1}{x_1 - 1}(\sqrt{5} - 1)$,

$\therefore E\left(\sqrt{5}, \frac{y_1}{x_1 - 1}(\sqrt{5} - 1)\right)$, 同理可得 $F\left(\sqrt{5}, \frac{y_2}{x_2 - 1}(\sqrt{5} - 1)\right)$6分

由对称性可知, 若以 EF 为直径的圆过定点, 则该定点一定在 x 轴上,

设该定点坐标为 $T(t, 0)$, 则 $\overrightarrow{TE} = \left(\sqrt{5} - t, \frac{y_1}{x_1 - 1}(\sqrt{5} - 1)\right)$, $\overrightarrow{TF} = \left(\sqrt{5} - t, \frac{y_2}{x_2 - 1}(\sqrt{5} - 1)\right)$, 8分

$$\therefore \overrightarrow{TE} \cdot \overrightarrow{TF} = (\sqrt{5} - t)^2 + \frac{(\sqrt{5} - 1)^2 y_1 y_2}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} = (\sqrt{5} - t)^2 + \frac{(\sqrt{5} - 1)^2 y_1 y_2}{(my_1 + \sqrt{5} - 1)(my_2 + \sqrt{5} - 1)}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\sqrt{5}-t)^2 + \frac{(\sqrt{5}-1)^2 y_1 y_2}{m^2 y_1 y_2 + (\sqrt{5}-1)m(y_1+y_2) + (\sqrt{5}-1)^2} \\
 &= (\sqrt{5}-t)^2 + \frac{(\sqrt{5}-1)^2 \cdot \frac{16}{4m^2-1}}{m^2 \cdot \frac{16}{4m^2-1} - (\sqrt{5}-1) \cdot m \cdot \frac{8\sqrt{5}m}{4m^2-1} + (\sqrt{5}-1)^2} \\
 &= (\sqrt{5}-t)^2 + \frac{16(\sqrt{5}-1)^2}{2\sqrt{5}-6} = (\sqrt{5}-t)^2 - 16 = 0,
 \end{aligned}$$

解得 $t = \sqrt{5} \pm 4$, 故以 EF 为直径的圆过定点 $(\sqrt{5} \pm 4, 0)$12分

22. (本小题满分12分)

(1) 由 $f(x) = (x-2)e^x + ax + 2$ 知, $f(0) = 0$, $f'(x) = (x-1)e^x + a$,1分

记 $g(x) = (x-1)e^x + a$, $x \in [0, +\infty)$, 则 $g'(x) = xe^x \geq 0$,

$\therefore f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增.2分

当 $a \geq 1$ 时, $f'(0) = -1 + a \geq 0$, $\therefore f'(x) \geq f'(0) \geq 0$ 对 $x \in [0, +\infty)$ 恒成立,

$\therefore f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore f(x) \geq f(0) = 0$, 符合题意;3分

当 $a < 1$ 时, $f'(0) = -1 + a < 0$, $x \rightarrow +\infty$, $f'(x) \rightarrow +\infty$,

故存在 $x_0 > 0$, 使得 $f'(x_0) = 0$, 从而 $x \in (0, x_0)$, $f'(x_0) < 0$, $f(x)$ 单调递减,

$\therefore f(x_0) < f(0) = 0$, 不合题意.

综上, a 的取值范围为 $[1, +\infty)$5分

(2) 当 $x \in (0, +\infty)$ 时, 由 (1) 知 $(x-2)e^x + x + 2 > 0$,

$\therefore x > \frac{2(e^x - 1)}{e^x + 1}$ 对一切 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 即 $\ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}$ 对一切 $x \in (1, +\infty)$ 恒成立,7分

令 $x = \frac{n+1}{n} > 1$, $n \in \mathbf{N}^*$, 则 $\ln \frac{n+1}{n} > \frac{2\left(\frac{n+1}{n} - 1\right)}{\frac{n+1}{n} + 1} = \frac{2}{2n+1}$,8分

$\therefore \ln 2 > \frac{2}{3}$, $\ln \frac{3}{2} > \frac{2}{5}$, \dots , $\ln \frac{n+1}{n} > \frac{2}{2n+1}$,

$\therefore \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} > \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \dots + \frac{2}{2n+1}$,10分

即 $\ln(n+1) > 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1}\right)$, $\therefore \ln \sqrt{n+1} > \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1}$12分

以上各解答题如有不同解法并且正确, 请按相应步骤给分.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线

