

潮州市 2022—2023 学年度第一学期期末考试高三级教学质量检测卷

数学参考答案

一、选择题（本题共 12 道小题，其中 1 至 8 小题为单项选择题，9 至 12 小题为多项选择题，每小题 5 分，共 60 分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	B	C	D	C	A	D	BD	BC	ABD	BCD

二、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 6 14. 8 15. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 16. 18

部分解析：

4. 两边同时求导得 $5(x+1)^4 = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4$. 令 $x=1$, 可得答案选 C.

5. 对于 A: $f(x) = e^x + \ln|x|$ 显然在 $(0, +\infty)$ 单调递增, 故 A 错误;

对于 B: $f(x) = e^{-x} + e^{2x}$ 定义域为 $\mathbb{R}$, 故 B 错误;

对于 C: $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 故 C 错误; 故选: D

6. $\because$ 不等式 $x + \frac{y}{4} \geq m^2 - 3m$ 恒成立, $\therefore (x + \frac{y}{4})_{\min} \geq m^2 - 3m$, $\because x > 0, y > 0$, 且 $\frac{1}{x} + \frac{4}{y} = 1$,

$\therefore x + \frac{y}{4} = (x + \frac{y}{4})(\frac{1}{x} + \frac{4}{y}) = \frac{y}{4x} + \frac{4x}{y} + 2 \geq 2\sqrt{\frac{y}{4x} \cdot \frac{4x}{y}} + 2 = 4$, 当且仅当 $\frac{y}{4x} = \frac{4x}{y}$, 即 $x=2, y=8$ 时

等号成立, $\therefore (x + \frac{y}{4})_{\min} = 4$, 故 $m^2 - 3m \leq 4$, 即 $(m+1)(m-4) \leq 0$, 解得 $-1 \leq m \leq 4$, $\therefore$ 实数 m 的取值范围是 $[-1, 4]$. 选 C.

7. 设直线 AB 的方程为 $x = my + 1$, 联立 $\begin{cases} y^2 = 4x \\ x = my + 1 \end{cases}$, 所以 $y^2 - 4my - 4 = 0$,

所以 $\begin{cases} y_1 + y_2 = 4m \\ y_1 y_2 = -4 \end{cases}$, 又因为 $|AF| = 3|BF|$, 所以 $y_1 = -3y_2$, 所以 $\begin{cases} -2y_2 = 4m \\ -3y_2^2 = -4 \end{cases}$, 所以 $m^2 = \frac{1}{3}$, 不妨取 $m = \frac{\sqrt{3}}{3}$,

则 $\begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ y_1 y_2 = -4 \end{cases}$, 所以 $|y_1 - y_2| = \sqrt{(\frac{4\sqrt{3}}{3})^2 + 16} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$, 所以

$S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} \cdot OF \cdot |y_1 - y_2| = \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{8\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$, 故选 A.

8. 取 B_1C_1 的中点 E, BB_1 的中点 F, 连结 A_1E, A_1F, EF , 取 EF 中点 O, 连结 A_1O ,

$\because$ 点 M, N 分别是棱长为 2 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中棱 BC, CC_1

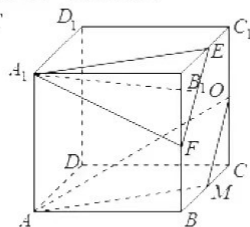
$\therefore AM \parallel A_1E, MN \parallel EF$,

$\therefore AM \cap MN = M, A_1E \cap EF = E, \therefore$ 平面 $AMN \parallel$ 平面 A_1EF ,

$\therefore$ 动点 P 在正方形 BCC_1B_1 (包括边界) 内运动, 且 $PA_1 \parallel$ 面 AMN ,

$\therefore$ 点 P 的轨迹是线段 EF,

$\because A_1E = A_1F = \sqrt{2^2 + 1} = \sqrt{5}, EF = \sqrt{1^2 + 1} = \sqrt{2}, \therefore A_1O \perp EF$,



∴当 P 与 O 重合时, PA_1 的长度取最小值 $A_1O = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, 故选: D .

9. 对于 A , 根据正态曲线的几何特征, 该正态分布对应的正态密度曲线越瘦高, 故 A 错误;

对于 B , 运用最小二乘法得到的线性回归直线一定经过点 $(\bar{x}, \bar{y})$, 故 B 正确;

对于 C , 线性相关系数 r 绝对值越接近 1, 表明 2 个随机变量相关性越强, 故 C 错误;

对于 D , 随机变量 Z^2 的观测值越大, 则两个变量有关系的可能性越大, 即犯错误的概率越小, 故 D 正确.

10. 由条件知 $\frac{1}{2}T = \frac{\pi}{\omega} \geq \frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{12} = \frac{5\pi}{12}$, $\therefore \omega \leq \frac{12}{5}$, $\because \omega \in N^+$, $\therefore \omega = 1$ 或 $\omega = 2$,

当 $\omega = 1$ 时, $f(x)$ 在区间 $[\frac{5\pi}{12}, \frac{5\pi}{6}]$ 上不单调递减 $\therefore \omega = 2$, $f(x) = 2\sin(2x - \frac{\pi}{3}) + \frac{3}{4}$, 故选 BC .

11. 对于 A , 因为 $a > b$, 所以 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2} = 1 + (\frac{b}{a})^2 < 2$, 故 C 的离心率 $e \in (1, \sqrt{2})$, A 正确;

对于 B , 因为 $F_1(-c, 0)$ 到渐近线 $bx - ay = 0$ 的距离为 $d = \frac{bc}{\sqrt{b^2 + a^2}} = b$, 所以 B 正确;

对于 C , 直线 $y = \frac{b}{a}x + a$ 与双曲线 C 相交于一点, 所以 C 不正确;

对于 D , 由正弦定理, 可知 $\triangle OMF_2$ 外接圆的半径为 $R = \frac{|OF_2|}{2\sin \angle OMF_2}$, 所以当 $\sin \angle OMF_2$ 最

大, 即 $OM \perp MF_2$ 时, R 最小. 由直角三角形性质可得 M 的纵坐标为 $\pm \frac{ab}{c}$, 所以 D 正确.

12. 因为 $xf'(x) - f(x) = (x-1)e^x$, 所以 $\frac{xf'(x) - f(x)}{x^2} = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$, 所以 $[\frac{f(x)}{x}]' = [\frac{e^x}{x}]' = \frac{(x-1)e^x}{x^2}$,

所以 $\frac{f(x)}{x}$ 在 $(1, +\infty)$ 单调递增, $\frac{f(2)}{2} < \frac{f(3)}{3}$, $3f(2) < 2f(3)$, A 错误

由 $[\frac{f(x)}{x}]' - [\frac{e^x}{x}]' = 0$, 得 $f(x) = e^x + cx$, 又 $f(1) = 0$, 所以 $e + c = 0$, 即 $c = -e$,

所以 $f(x) = e^x - ex$, $f'(x) = e^x - e$, 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 单调递增, 所以 A 正确

当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 单调递减, 所以 $f_{\text{最小}}(x) = f(1) = e - e = 0$, 故 BCD 正确

13. 过点 C 作 $CD \perp AB$ 于 D , 则 $AD = \frac{1}{2}AB = \sqrt{3}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})$

$$= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} + 0 = 6$$

14. 由 $a_5 - a_3 = 12$, $a_6 - a_4 = 24$ 得公比 $q = \frac{a_6 - a_4}{a_5 - a_3} = 2$, 从而 $a_1 = 1$, $a_n = 2^{n-1}$, $S_n = 2^n - 1$,

$$T_n = 2^0 \cdot 2^1 \cdot 2^2 \cdots 2^{n-1} = 2^{\frac{n^2-n}{2}}, \quad \frac{(S_n+1)^2}{T_n} = \frac{2^{2n}}{2^{\frac{n^2-n}{2}}} = 2^{\frac{1}{2}(5n-n^2)} = 2^{\frac{1}{2}(n-\frac{5}{2})^2 - \frac{25}{8}}, \quad \text{所以当 } n=2 \text{ 或 } n=3$$

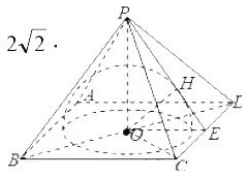
时, $\frac{(S_n+1)^2}{T_n}$ 取最大值 8.

15. 如图, 连接 PO, BD, 取 CD 的中点 E, 连接 PE, OE, 过 O 作 OH ⊥ PE 于 H. 易知 PO ⊥ 底面 ABCD, 设 AB=4,

则 $BD = \sqrt{BA^2 + BC^2} = 4\sqrt{2}$, $BO = \frac{1}{2}BD = 2\sqrt{2}$, $PO = \sqrt{BP^2 - BO^2} = 2\sqrt{2}$.

设球 M 的半径为 R, 半球 O 的半径为 R_0 , 则 $R = 2\sqrt{2}$.

$R_0 = OH = \frac{PO \cdot OE}{PE} = \frac{2\sqrt{2} \times 2}{2\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ 故 $\frac{R_0}{R} = \frac{OH}{PO} = \frac{OE}{PE} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

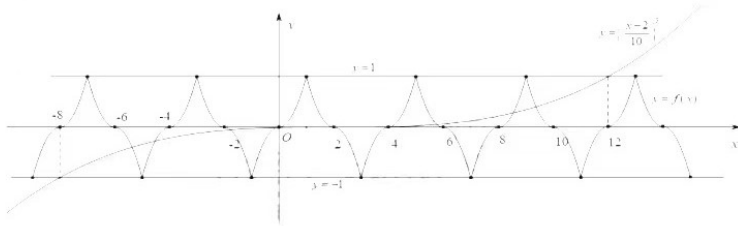


16. 依题意, 定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(2-x)$,

所以 $f(x)$ 关于 $x=1$ 对称, 从而可知 $f(x)$ 是周期为 4 的周期函数. 且 $f(x)$ 关于点 $(2,0)$ 对称.

由于函数 $y = \left(\frac{x-2}{10}\right)^3$ 关于 $(2,0)$ 对称, 画出 $y = f(x)$, $y = \left(\frac{x-2}{10}\right)^3$ 的图象如下图所示,

由图可知, $y = f(x)$, $y = \left(\frac{x-2}{10}\right)^3$ 有 9 个公共点, 所以 $g(x)$ 的所有零点之和为 $9 \times 2 = 18$.



17. (1) 数列 $\{a_n\}$ 是递减的等比数列, 所以数列 $\{a_n\}$ 的公比 $q > 0$,

又因为 $\{a_1, a_2, a_3\} \subseteq \{-4, -3, -2, 1, 2, 3, 4\}$, 所以 $a_1 = 4, a_2 = 2, a_3 = 1, \dots \dots 2$ 分

$$\text{所以 } q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{2} \quad \dots \dots \dots 3 \text{ 分} \quad S_n = \frac{4(1 - \frac{1}{2^n})}{1 - \frac{1}{2}} = 8(1 - \frac{1}{2^n}) \quad \dots \dots \dots 4 \text{ 分}$$

$$\frac{S_n + S_{n+2}}{2} - S_{n+1} = 4(1 - \frac{1}{2^n}) + 4(1 - \frac{1}{2^{n+2}}) - 8(1 - \frac{1}{2^{n+1}}) = -\frac{4}{2^n} - \frac{4}{2^{n+2}} + \frac{8}{2^{n+1}} = -\frac{1}{2^n} < 0, \quad \dots \dots \dots 5 \text{ 分}$$

即 $\frac{S_n + S_{n+2}}{2} < S_{n+1}$ 成立, 所以数列 $\{S_n\}$ 是“有序减差数列”. $\dots \dots \dots 6$ 分

$$(2) \text{ 由 (1) 得 } a_n = \frac{8}{2^n}, \quad \dots \dots \dots 7 \text{ 分} \quad b_n = \log_2 a_n = \log_2 \frac{8}{2^n} = \log_2 2^{3-n} = 3-n \quad \dots \dots 8 \text{ 分}$$

所以 $c_1 + c_2 + \dots + c_9 = (a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9) + (b_2 + b_4 + b_6 + b_8)$

$$= 8(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^7} + \frac{1}{2^9}) + (1 - 1 - 3 - 5) = \frac{8 \times \frac{1}{2} \times (1 - \frac{1}{4^5})}{1 - \frac{1}{4}} - 8 = -\frac{171}{64} \quad \dots \dots \dots 10 \text{ 分}$$

18. (1) 解: 在 $\triangle ACD$ 中, 由余弦定理得:

$$AD^2 = AC^2 + DC^2 - 2AC \cdot DC \cdot \cos \angle ACD \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{即 } DC^2 - 3DC + 2 = 0, \text{ 解得 } DC=1, \text{ 或 } DC=2 \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 解法一: 由 $BC \perp CD$, 且 $\angle ACD = 30^\circ$, 可得 $\angle ACB = 60^\circ$,

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, 设 } BC=a, \text{ 由余弦定理可得 } AB = \sqrt{a^2 + 3 - \sqrt{3}a} \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{因为 } \triangle ABC \text{ 为锐角三角形, 所以 } \begin{cases} BC^2 < AB^2 + AC^2 \\ AC^2 < AB^2 + BC^2 \end{cases} \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{即 } \begin{cases} a^2 < a^2 + 3 - \sqrt{3}a + 3 \\ 3 < a^2 + 3 - \sqrt{3}a + a^2 \end{cases} \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } \frac{\sqrt{3}}{2} < a < 2\sqrt{3}, \text{ 所以 } BC \text{ 的取值范围为 } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3} \right) \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

(2) 解法二: 由 $BC \perp CD$, 且 $\angle ACD = 30^\circ$, 可得 $\angle ACB = 60^\circ$,

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, 由正弦定理 } \frac{BC}{\sin \angle BAC} = \frac{AC}{\sin B},$$

$$\text{得 } BC = \frac{AC \sin \angle BAC}{\sin B} = \frac{\sqrt{3} \sin(120^\circ - B)}{\sin B} = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2 \tan B} + \frac{1}{2} \right), \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

因为 $\triangle ABC$ 为锐角三角形, $0^\circ < \angle BAC = 120^\circ - B < 90^\circ$, $0^\circ < B < 90^\circ$,

$$\text{所以 } 30^\circ < B < 90^\circ, \text{ 可得 } \tan B > \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{则 } 0 < \frac{1}{\tan B} < \sqrt{3}, \text{ 所以 } \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2 \tan B} + \frac{1}{2} < 2, \text{ 所以 } \frac{\sqrt{3}}{2} < BC < 2\sqrt{3},$$

$$\text{所以 } BC \text{ 的取值范围为 } \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\sqrt{3} \right). \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

19. (1) 证明: 因为四边形 $ABCD$ 是菱形, 所以 $AC \perp BD$ $\dots\dots\dots 1 \text{ 分}$

又 $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 所以 $PA \perp BD$ $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

又 $AC \cap PA = A$, 所以 $BD \perp$ 平面 PAC $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

因为 $BD \subset$ 平面 QBD , 所以平面 $PAC \perp$ 平面 QBD $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

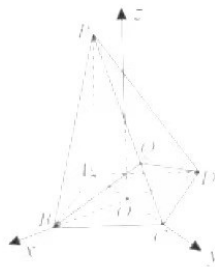
(2) 设 BD 与 AC 的交点为 O , 以 OB, OC 所在的直线分别为 x, y 轴, 与 AP 同方向的直线为 z

轴建立空间直角坐标系, 则 $Q(0, \frac{1}{3}, 1), P(0, -1, 3), B(\sqrt{3}, 0, 0), C(0, 1, 0), D(-\sqrt{3}, 0, 0)$

$$\overrightarrow{BQ} = (-\sqrt{3}, \frac{1}{3}, 1), \overrightarrow{BD} = (-2\sqrt{3}, 0, 0) \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

设平面 QBD 的一个法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$, 则

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{BQ} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \end{cases} \text{ 所以 } \begin{cases} -\sqrt{3}x + \frac{1}{3}y + z = 0 \\ -2\sqrt{3}x = 0 \end{cases}$$



令 $y=3$, 得 $x=0$, $z=-1$, $\vec{n}=(0,3,-1)$ 8 分

同理可得, 平面 PBC 的一个法向量为 $\vec{m}=(\sqrt{3},3,2)$ 9 分

$$|\cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle| = \frac{9-2}{\sqrt{10} \times 4} = \frac{7\sqrt{10}}{40}$$
11 分

所以平面 PBC 与平面 QBD 的夹角的余弦值为 $\frac{7\sqrt{10}}{40}$12 分

20. (1) 方案一: 逐个检验, 检验次数为 4;1 分

方案二: 混合在一起检测, 记检测次数为 X , 则随机变量 X 的可能取值为 1, 5

$$\text{所以 } P(X=1) = (1-\frac{1}{3})^4 = \frac{16}{81}, \quad P(X=5) = 1 - \frac{16}{81} = \frac{65}{81}, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{所以方案二检测次数 } X \text{ 的数学期望为 } E(X) = 1 \times \frac{16}{81} + 5 \times \frac{65}{81} = \frac{341}{81}; \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

方案三: 每组两个样本检测时, 若呈阴性则检测次数为 1 次, 其概率为 $(1-\frac{1}{3})^2 = \frac{4}{9}$,4 分

若呈阳性则检测次数为 3 次, 其概率为 $1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$,

设方案三的检测次数为随机变量 Y , 则 Y 的可能取值为 2, 4, 6,

$$\text{所以 } P(Y=2) = (\frac{4}{9})^2 = \frac{16}{81}, \quad P(Y=4) = C_2^1 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{9} = \frac{40}{81}, \quad P(Y=6) = (\frac{5}{9})^2 = \frac{25}{81}, \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{所以方案三检测次数 } Y \text{ 的期望为 } E(Y) = 2 \times \frac{16}{81} + 4 \times \frac{40}{81} + 6 \times \frac{25}{81} = \frac{342}{81}, \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

因为 $4 < E(X) < E(Y)$, 所以选择方案一最优.8 分

(2) 方案二: 记检测次数为 X , 则随机变量 X 的可能取值为 1, 5,

$$\text{所以 } P(X=1) = (1-p)^4, \quad P(X=5) = 1 - (1-p)^4, \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{所以随机变量 } X \text{ 的数学期望为 } E(X) = (1-p)^4 + 5 \times [1 - (1-p)^4] = 5 - 4(1-p)^4, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{由于“方案二”比“方案一”更“优”, 则 } E(X) = 5 - 4(1-p)^4 < 4, \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\text{解得 } 0 < p < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{即当 } 0 < p < 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 时, 方案二比方案一更“优”.} \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$21. (1) \text{ 由 } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB}, \quad |\overrightarrow{MN}| = 4, \text{ 可得 } 2a = 4, \text{ 解得 } a = 2, \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{又 } \triangle PAB \text{ 的面积的最大值为 } 2, \text{ 所以 } \frac{1}{2} \times 4 \times b = 2, \text{ 解得 } b = 1, \quad \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{所以椭圆 } C \text{ 的方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1. \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 由题意知, 点 P 与点 A, B 不重合, 设 $M(-2, m), N(2, m)$,

$$\text{则直线 } PM \text{ 的方程为 } y - y_0 = \frac{y_0 - m}{x_0 + 2}(x - x_0), \text{ 令 } y = 0 \text{ 得 } x_D = x_0 - \frac{y_0(x_0 + 2)}{y_0 - m}, \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

同理得 $x_E = x_0 - \frac{y_0(x_0 - 2)}{y_0 - m}$,6 分

所以 $|AD| = |x_0 - \frac{y_0(x_0 + 2)}{y_0 - m} + 2| = |\frac{m(x_0 + 2)}{y_0 - m}|$,7 分

$|DE| = |x_0 - \frac{y_0(x_0 - 2)}{y_0 - m} - [x_0 - \frac{y_0(x_0 + 2)}{y_0 - m}]| = |\frac{4y_0}{y_0 - m}|$,8 分

$|EB| = |2 - x_0 + \frac{y_0(x_0 - 2)}{y_0 - m}| = |\frac{m(2 - x_0)}{y_0 - m}|$,9 分

因为 $|AD|$, $|DE|$, $|EB|$ 成等比数列,

所以 $|AD| \cdot |EB| = |DE|^2$, 即 $\frac{m^2(4 - x_0^2)}{(y_0 - m)^2} = \frac{16y_0^2}{(y_0 - m)^2}$,10 分

因为 $\frac{x_0^2}{4} + y_0^2 = 1$, 即 $4 - x_0^2 = 4y_0^2$,

所以 $m^2 = 4$, 即 $m = \pm 2$12 分

22. (1) 由题意, 可得 $h(x) = f(x) - g(x) = x^2 - x - \ln x$,

$h'(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x} = \frac{(2x+1)(x-1)}{x}$,1 分

令 $h'(x) = 0$, 得 $x = 1$.

① 当 $\frac{1}{e} < t \leq 1$ 时, $h(x)$ 在 $[\frac{1}{e}, t]$ 上单调递减,

$\therefore h_{\min}(x) = h(t) = t^2 - t - \ln t$;2 分

② 当 $t > 1$ 时, $h(x)$ 在 $[\frac{1}{e}, 1]$ 上单调递减, 在 $[1, t]$ 上单调递增,

$\therefore h_{\min}(x) = h(1) = 0$3 分

综上, 当 $\frac{1}{e} < t \leq 1$ 时, $h_{\min}(x) = t^2 - t - \ln t$; 当 $t > 1$ 时, $h_{\min}(x) = 0$4 分

(2) 设函数 $f(x)$ 在点 $(x_1, f(x_1))$ 处与函数 $g(x)$ 在点 $(x_2, g(x_2))$ 处有相同的切线,

则 $f'(x_1) = g'(x_2) = \frac{f(x_1) - g(x_2)}{x_1 - x_2}$, $\therefore 2x_1 - a = \frac{1}{x_2} = \frac{x_1^2 - ax_1 + 1 - \ln x_2 - a}{x_1 - x_2}$,5 分

$\therefore x_1 = \frac{1}{2x_2} + \frac{a}{2}$, 代入 $\frac{x_1 - x_2}{x_2} = x_1^2 - ax_1 + 1 - \ln x_2 - a$, 得 $\frac{1}{4x_2^2} + \frac{a}{2x_2} + \ln x_2 + \frac{a^2}{4} + a - 2 = 0$.

$\therefore$ 问题转化为: 关于 x 的方程 $\frac{1}{4x^2} + \frac{a}{2x} + \ln x + \frac{a^2}{4} + a - 2 = 0$ 有解,6 分

设 $F(x) = \frac{1}{4x^2} + \frac{a}{2x} + \ln x + \frac{a^2}{4} + a - 2 (x > 0)$, 则函数 $F(x)$ 有零点,

$\therefore F(x) = \frac{1}{4}(\frac{1}{x} + a)^2 + \ln x + a - 2$, 当 $x = e^{2-a}$ 时, $\ln x + a - 2 = 0$, $\therefore F(e^{2-a}) > 0$7 分

$\therefore$ 问题转化为: $F(x)$ 的最小值小于或等于 0.8 分

$$F'(x) = -\frac{1}{2x^3} - \frac{a}{2x^2} + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 - ax - 1}{2x^3}, \quad \text{设 } 2x_0^2 - ax_0 - 1 = 0 (x_0 > 0),$$

则当 $0 < x < x_0$ 时, $F'(x) < 0$, 当 $x > x_0$ 时, $F'(x) > 0$.

$\therefore F(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore F(x) \text{ 的最小值为 } F(x_0) = \frac{1}{4x_0^2} + \frac{a}{2x_0} + \ln x_0 + \frac{a^2}{4} + a - 2. \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{由 } 2x_0^2 - ax_0 - 1 = 0 \text{ 知 } a = 2x_0 - \frac{1}{x_0}, \text{ 故 } F(x_0) = x_0^2 + 2x_0 - \frac{1}{x_0} + \ln x_0 - 2. \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{设 } \varphi(x) = x^2 + 2x - \frac{1}{x} + \ln x - 2 (x > 0),$$

则 $\varphi'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} > 0$, 故 $\varphi(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增,

$\because \varphi(1) = 0$, $\therefore$ 当 $x \in (0, 1]$ 时, $\varphi(x) \leq 0$,

$\therefore F(x)$ 的最小值 $F(x_0) \leq 0$ 等价于 $0 < x_0 \leq 1$. \dots\dots\dots 11 \text{ 分}

又 $\because$ 函数 $y = 2x - \frac{1}{x}$ 在 $(0, 1]$ 上单调递增, $\therefore a = 2x_0 - \frac{1}{x_0} \in (-\infty, 1]$. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线