

南通市 2023 届高三第二次调研测试

数 学

本试卷共 6 页，22 小题，满分 150 分。考试用时 120 分钟。

注意事项：1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号、考场号和座位号填写在答题卡上。将条形码横贴在答题卡“条形码粘贴处”。

2. 作答选择题时，选出每小题答案后，用 2B 铅笔在答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑；如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案。答案不能答在试卷上。

3. 非选择题必须用黑色字迹的钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新答案；不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答无效。

4. 考生必须保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 若 M, N 是 U 的非空子集， $M \cap N = M$ ，则

- A. $M \subseteq N$ B. $N \subseteq M$ C. $\complement_U M = N$ D. $\complement_U N = M$

2. 若 $iz = (1 - 2i)^2$ ，则 $z =$

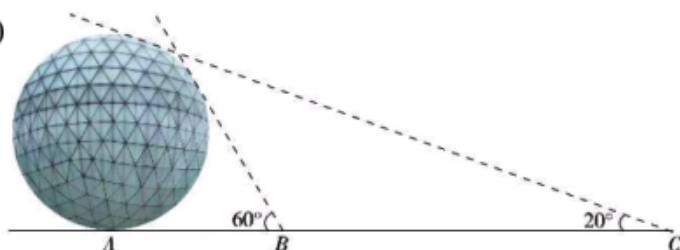
- A. $4 + 3i$ B. $4 - 3i$ C. $-4 + 3i$ D. $-4 - 3i$

3. 已知 $(x^3 + \frac{2}{x})^n$ 的展开式中各项系数和为 243，则展开式中常数项为

- A. 60 B. 80 C. 100 D. 120

4. 古代数学家刘徽编撰的《重差》是中国最早的一部测量学著作，也为地图学提供了数学基础。现根据刘徽的《重差》测量一个球体建筑物的高度，已知点 A 是球体建筑物与水平地面的接触点（切点），地面上 B, C 两点与点 A 在同一条直线上，且在点 A 的同侧。若在 B, C 处分别测得球体建筑物的最大仰角为 60° 和 20° ，且 $BC = 100$ m，则该球体建筑物的高度约为 ($\cos 10^\circ \approx 0.985$)

- A. 49.25 m B. 50.76 m
C. 56.74 m D. 58.60 m

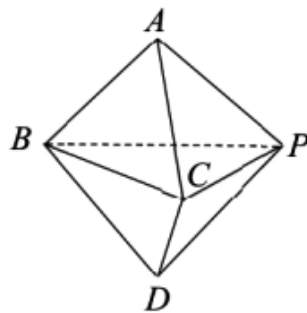


5. 在 $\square ABCD$ 中, $\overline{BE} = \frac{1}{2}\overline{BC}$, $\overline{AF} = \frac{1}{3}\overline{AE}$. 若 $\overline{AB} = m\overline{DF} + n\overline{AE}$, 则 $m + n =$
- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{5}{6}$ D. $\frac{4}{3}$
6. 记函数 $f(x) = \sin(\omega x + \frac{\pi}{4})$ ($\omega > 0$)的最小正周期为 T . 若 $\frac{\pi}{2} < T < \pi$, 且 $f(x) \leq |f(\frac{\pi}{3})|$, 则 $\omega =$
- A. $\frac{3}{4}$ B. $\frac{9}{4}$ C. $\frac{15}{4}$ D. $\frac{27}{4}$
7. 已知函数 $f(x)$ 的定义域为 \mathbf{R} , $y = f(x) + e^x$ 是偶函数, $y = f(x) - 3e^x$ 是奇函数, 则 $f(x)$ 的最小值为
- A. e B. $2\sqrt{2}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $2e$
8. 已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$)的左、右焦点, 点 P 在双曲线上, $PF_1 \perp PF_2$, 圆 $O: x^2 + y^2 = \frac{9}{4}(a^2 + b^2)$, 直线 PF_1 与圆 O 相交于 A, B 两点, 直线 PF_2 与圆 O 相交于 M, N 两点. 若四边形 $AMBN$ 的面积为 $9b^2$, 则 C 的离心率为
- A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{8}{5}$ C. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{10}}{5}$

二、选择题: 本题共4小题, 每小题5分, 共20分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得5分, 部分选对的得2分, 有选错的得0分。

9. 已知甲种杂交水稻近五年的产量(单位: t/hm^2)数据为: 9.8, 10.0, 10.0, 10.0, 10.2, 乙种杂交水稻近五年的产量(单位: t/hm^2)数据为: 9.6, 9.7, 10.0, 10.2, 10.5, 则
- A. 甲种的样本极差小于乙种的样本极差
- B. 甲种的样本平均数等于乙种的样本平均数
- C. 甲种的样本方差大于乙种的样本方差
- D. 甲种的样本60百分位数小于乙种的样本60百分位数
10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_n = \begin{cases} 2n-13, & 1 \leq n \leq 6, \\ (-3)^{n-7} - 1, & n > 6. \end{cases}$ 若 $S_k = -32$, 则 k 可能为
- A. 4 B. 8 C. 9 D. 12

11. 如图，正三棱锥 $A-PBC$ 和正三棱锥 $D-PBC$ 的侧棱长均为 $\sqrt{2}$ ， $BC=2$ 。若将正三棱锥 $A-PBC$ 绕 BC 旋转，使得点 A, P 分别旋转至点 A', P' 处，且 A', B, C, D 四点共面，点 A', D 分别位于 BC 两侧，则



- A. $A'D \perp CP$
 B. $PP' \parallel$ 平面 $A'BDC$
 C. 多面体 $PP'A'BDC$ 的外接球的表面积为 6π
 D. 点 A, P 旋转运动的轨迹长相等

12. 已知 $a > 0$ ， $e^a + \ln b = 1$ ，则

- A. $a + \ln b < 0$ B. $e^a + b > 2$ C. $\ln a + e^b < 0$ D. $a + b > 1$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 已知点 P 在抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 上，过 P 作 C 的准线的垂线，垂足为 H ，点 F 为 C 的焦点。若 $\angle HPF = 60^\circ$ ，点 P 的横坐标为 1，则 $p =$ _____。

14. 过点 $(-1, 0)$ 作曲线 $y = x^3 - x$ 的切线，写出一条切线的方程_____。

15. 已知一扇矩形窗户与地面垂直，高为 1.5 m，下边长为 1 m，且下边距地面 1 m。若某人观察到窗户在平行光线的照射下，留在地面上的影子恰好为矩形，其面积为 1.5 m^2 ，则窗户与地面影子之间光线所形成的几何体的体积为_____ m^3 。

16. “完全数”是一类特殊的自然数，它的所有正因数的和等于它自身的两倍。寻找“完全数”用到函数 $\sigma(n): \forall n \in \mathbf{N}^*$ ， $\sigma(n)$ 为 n 的所有正因数之和，如 $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$ ，则 $\sigma(20) =$ _____； $\sigma(6^n) =$ _____。

(第一空 2 分，第二空 3 分)

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本题 10 分)

记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ，已知 $\sin C = \sqrt{3} \sin A \sin B$ 。

(1) 若 $A = \frac{\pi}{3}$ ，求 $\cos B$ ；

(2) 若 $c = \sqrt{6}$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积。

18. (本题 12 分)

已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_1 = 1$ ， $S_{n+1}^2 - S_n^2 = 8n$ ， $n \in \mathbf{N}^*$ 。

(1) 求 S_n ；

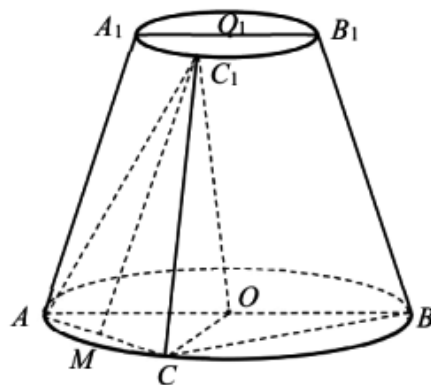
(2) 在数列 $\{a_n\}$ 的每相邻两项 a_k, a_{k+1} 之间依次插入 a_1, a_2, \dots, a_k ，得到数列 $\{b_n\}$ ：
 $a_1, a_1, a_2, a_1, a_2, a_3, a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ ，求 $\{b_n\}$ 的前 100 项和。

19. (本题 12 分)

如图，在圆台 OO_1 中， A_1B_1, AB 分别为上、下底面直径，且 $A_1B_1 \parallel AB$ ， $AB = 2A_1B_1$ ， CC_1 为异于 AA_1, BB_1 的一条母线。

(1) 若 M 为 AC 的中点，证明： $C_1M \parallel$ 平面 ABB_1A_1 ；

(2) 若 $OO_1 = 3$ ， $AB = 4$ ， $\angle ABC = 30^\circ$ ，求二面角 $A - C_1C - O$ 的正弦值。



20. (本题 12 分)

我国风云系列卫星可以监测气象和国土资源情况. 某地区水文研究人员为了了解汛期人工测雨量 x (单位: dm) 与遥测雨量 y (单位: dm) 的关系, 统计得到该地区 10 组雨量数据如下:

样本号 i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
人工测雨量 x_i	5.38	7.99	6.37	6.71	7.53	5.53	4.18	4.04	6.02	4.23
遥测雨量 y_i	5.43	8.07	6.57	6.14	7.95	5.56	4.27	4.15	6.04	4.49
$ x_i - y_i $	0.05	0.08	0.2	0.57	0.42	0.03	0.09	0.11	0.02	0.26

并计算得 $\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 353.6$, $\sum_{i=1}^{10} y_i^2 = 361.7$, $\sum_{i=1}^{10} x_i y_i = 357.3$, $\bar{x}^2 \approx 33.62$, $\bar{y}^2 \approx 34.42$, $\bar{x}\bar{y} \approx 34.02$.

(1) 求该地区汛期遥测雨量 y 与人工测雨量 x 的样本相关系数 (精确到 0.01), 并判断它们是否具有线性相关关系;

(2) 规定: 数组 (x_i, y_i) 满足 $|x_i - y_i| < 0.1$ 为 “I 类误差”; 满足 $0.1 \leq |x_i - y_i| < 0.3$ 为 “II 类误差”; 满足 $|x_i - y_i| \geq 0.3$ 为 “III 类误差”. 为进一步研究, 该地区水文研究人员从 “I 类误差”、“II 类误差” 中随机抽取 3 组数据与 “III 类误差” 数据进行对比, 记抽到 “I 类误差” 的数据的组数为 X , 求 X 的概率分布与数学期望.

附: 相关系数 $r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$, $\sqrt{304.5} \approx 17.4$.

21. (本题 12 分)

已知椭圆 $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 焦距为 2, 过 E 的左焦点 F 的直线 l 与 E 相交于 A, B 两点, 与直线 $x = -2$ 相交于点 M .

(1) 若 $M(-2, -1)$, 求证: $|MA| \cdot |BF| = |MB| \cdot |AF|$;

(2) 过点 F 作直线 l 的垂线 m 与 E 相交于 C, D 两点, 与直线 $x = -2$ 相交于点 N .

求 $\frac{1}{|MA|} + \frac{1}{|MB|} + \frac{1}{|NC|} + \frac{1}{|ND|}$ 的最大值.

22. (本题 12 分)

已知函数 $f(x) = ax - \ln x - \frac{a}{x}$.

(1) 若 $x > 1, f(x) > 0$, 求实数 a 的取值范围;

(2) 设 x_1, x_2 是函数 $f(x)$ 的两个极值点, 证明: $|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\sqrt{1-4a^2}}{a}$.

