

2024 届高三一轮复习联考(一) 全国卷

文科数学参考答案及评分意见

- 1.C 【解析】特称命题的否定为全称命题,所以命题  $p$  的否定应该为  $\forall n \in \mathbf{N}, n^2 < 2^n$ . 故选 C.
- 2.B 【解析】由  $i^3 = -i, i^4 = 1$ , 得  $z = 2 + i^3 + i^4 = 2 - i + 1 = 3 - i$ , 所以  $|z| = \sqrt{10}$ , 故选 B.
- 3.A 【解析】由题意知  $A = \{x | x^2 < 9\} = (-3, 3), B = \{y | y = 2^x + 1\} = (1, +\infty)$ , 所以  $A \cup B = (-3, +\infty)$ , 故选 A.
- 4.D 【解析】∵角  $\theta$  的终边经过点  $(1, \sqrt{3})$ , ∴ $\cos \theta = \frac{1}{2}, \sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , ∴ $\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}, \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ , 所以  $\sin \frac{\theta}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{6} + k\pi\right)$ , 当  $k$  为偶数时,  $\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}$ , 当  $k$  为奇数时,  $\sin \frac{\theta}{2} = -\frac{1}{2}$ , 故选 D.
- 5.D 【解析】由题意知  $f(x)$  的定义域为  $\mathbf{R}, f(-x) + f(x) = \frac{a}{e^{-x}+1} - 1 + \frac{a}{e^x+1} - 1 = a - 2 = 0$ , ∴ $a = 2, g(x) = x^2 - ax$  的单调递增区间为  $\left(\frac{a}{2}, +\infty\right)$ , 即为  $(1, +\infty)$ , 故选 D.
- 6.B 【解析】由  $x^2 - xy + 2 = 0$ , 解得  $y = x + \frac{2}{x}$ , 又因为  $x > 0$ , 所以  $x + \frac{1}{x} + y = \frac{3}{x} + 2x \geq 2\sqrt{6}$ , 当且仅当  $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$  时等号成立, 故选 B.
- 7.C 【解析】设  $f(x) = x \cos x + \sin x$ , 则  $f'(x) = 2\cos x - x \sin x, f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$ , 所以曲线  $y = x \cos x + \sin x$  在点  $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$  处的切线方程为  $y = -\frac{\pi}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 1$ , 即  $x + \frac{2}{\pi}y - \frac{2}{\pi} = 0$ , 故选 C.
- 8.D 【解析】 $\sin 126^\circ = \sin(90^\circ + 36^\circ) = \cos 36^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}, \cos 36^\circ = 1 - 2\sin^2 18^\circ = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ , 解得  $\sin^2 18^\circ = \frac{3-\sqrt{5}}{8}$ , ∴ $\sin 18^\circ > 0$ , ∴ $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ , 故选 D.
- 9.B 【解析】 $f(x) = \frac{x}{e^x} + a(x-1)^2, f'(x) = \frac{1-x}{e^x} + 2a(x-1) = \frac{(x-1)(2ae^x-1)}{e^x}$ , ①当  $a \leq 0$  时,  $2ae^x - 1 < 0$ , 当  $x > 1$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $x < 1$  时,  $f'(x) > 0$ , ∴ $f(x)$  在  $(-\infty, 1)$  上单调递增; 在  $(1, +\infty)$  上单调递减, 所以  $x = 1$  是函数  $f(x)$  的一个极大值点, 符合题意; ②当  $a = \frac{1}{2e}$  时,  $f'(x) = \frac{(x-1)(e^{x-1}-1)}{e^x}$ , 当  $x > 1$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $x < 1$  时,  $f'(x) > 0$ , ∴ $f(x)$  在  $(-\infty, 1)$  上单调递增, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 此时,  $f(x)$  无极值点; ③当  $a > \frac{1}{2e}$  时, 由  $f'(x) = \frac{(x-1)(2ae^x-1)}{e^x} = 0$ , 解得  $x_1 = 1$  或  $x_2 = -\ln(2a)$ , 且满足  $-\ln(2a) < 1$ , 当  $x > 1$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $-\ln(2a) < x < 1$  时,  $f'(x) < 0$ , 当  $x < -\ln(2a)$  时,  $f'(x) > 0$ , ∴ $f(x)$  在  $(-\infty, -\ln(2a))$  上单调递增, 在  $(-\ln(2a), 1)$  上单调递减, 在  $(1, +\infty)$  上单调递增, 所以  $x = 1$  是函数  $f(x)$  的一个极小值点, 不符合题意; ④当  $0 < a < \frac{1}{2e}$  时, 由  $f'(x) = \frac{(x-1)(2ae^x-1)}{e^x} = 0$ , 解得  $x_1 = 1$  或  $x_2 = -\ln(2a)$ , 且满足  $-\ln(2a) > 1$ , 当  $x > -\ln(2a)$  时,  $f'(x) > 0$ ; 当  $1 < x < -\ln(2a)$  时,  $f'(x) < 0$ , 当  $x < 1$  时,  $f'(x) > 0$ , ∴ $f(x)$  在  $(-\infty, 1)$  上单调递增, 在  $(1, -\ln(2a))$  上单调递减, 在  $(-\ln(2a), +\infty)$  上单调递增, 所以  $x = 1$  是函数  $f(x)$  的一个极大值点, 符合



题意, 综上,  $a \in \left(-\infty, \frac{1}{2e}\right)$ , 故选 B.

10.B 【解析】 $f(x+1)+f(-3-x)=0$ , 所以  $f(x)$  关于点  $(-1, 0)$  中心对称;  $f(x+1)=f(1-x)$ , 所以  $f(x)$  关于直线  $x=1$  对称, 所以  $f(x)=f(-x+2)=-f(x-4)$ , 故  $f(x+8)=-f(x+4)=f(x)$ , 即  $f(x)$  是周期为 8 的周期函数, 所以  $f\left(\frac{2023}{2}\right)=f\left(8 \times 126 + \frac{7}{2}\right)=f\left(\frac{7}{2}\right)=-f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\left|\ln\left(-\frac{1}{2} + \frac{4}{3}\right)\right|=\ln \frac{5}{6}$ , 故选 B.

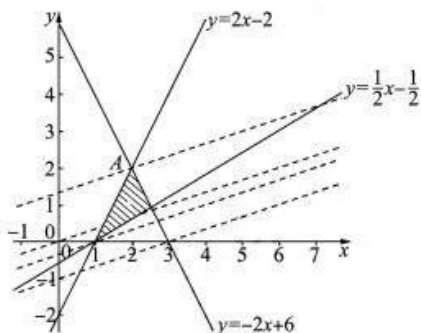
11.B 【解析】充分性:  $x-y > 1$ , 所以  $e^x > e^{x+1} = e \cdot e^x > 2e^x$ , 由  $y > 0$  知,  $e^y > 1$ , 所以  $2e^x > e^y + 1$ , 故  $e^x > e^y + 1$ , 即  $e^x - e^y > 1$ , 所以“ $x-y > 1$ ”是“ $e^x - e^y > 1$ ”的充分条件; 必要性: 取  $x=2, y=1$ , 则  $e^x - e^y = e^2 - e > 1, x-y=1$ , 所以“ $x-y > 1$ ”不是“ $e^x - e^y > 1$ ”的必要条件, 综上, “ $x-y > 1$ ”是“ $e^x - e^y > 1$ ”的充分不必要条件. 故选 B.

12.D 【解析】 $3 < 4 < 3\sqrt{3}$ , 所以  $a = \log_3 4 \in \left(1, \frac{3}{2}\right)$ ; 因为  $(0.8)^{\frac{3}{2}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{8}{5\sqrt{5}} = \frac{1}{5}\sqrt{\frac{64}{5}} > \frac{1}{5}\sqrt{\frac{49}{4}} = 0.7, 0.7 > 0.64 = (0.8)^2$ , 即  $(0.8)^{\frac{3}{2}} > 0.7 > (0.8)^2$ , 所以  $b = \log_{0.8} 0.7 \in \left(\frac{3}{2}, 2\right)$ ;  $c = \log_8 7 < 1$ , 综上,  $c < 1 < a < \frac{3}{2} < b$ , 故选 D.

13.-3 【解析】 $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ , 两边平方得  $1 - \sin 2\alpha = \frac{1}{5}$ , 得  $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$ , 所以  $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha =$   
~~取~~ 因为  $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  所以  $\sin \alpha > 0, \cos \alpha > 0$ , 故  $\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ , 所以  $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\tan \alpha + 1}{1 - \tan \alpha} = \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha} = -3$ .

14.-4 【解析】根据不等式组得到的可行域如下图所示阴影部分所示. 作出直线  $x-3y=0$  并平移, 由图可知, 当平移

后的直线经过点 A 时,  $z$  取最小值, 根据  $\begin{cases} 2x+y-6=0 \\ 2x-y-2=0 \end{cases}$  得  $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$ , 所以  $z_{\min} = 2 - 3 \times 2 = -4$ .



15.  $\pi + 1$  【解析】函数  $f(x) = \sin \omega x (\omega > 0)$  的最小正周期为  $4\pi$ , 所以  $\frac{2\pi}{\omega} = 4\pi$ , 解得  $\omega = \frac{1}{2}$ ,  $f(x) = \sin \frac{x}{2}$  向右平移  $\varphi (\varphi > 0)$  个单位长度后得到  $g(x) = \sin \frac{x-\varphi}{2}$ , 当  $x \in (0, 1)$  时,  $\frac{x-\varphi}{2} \in \left(-\frac{\varphi}{2}, \frac{1-\varphi}{2}\right)$ , 又因为  $g(x)$  在  $(0, 1)$  上单

调递减, 所以  $\begin{cases} -\frac{\varphi}{2} \geq -\frac{3}{2}\pi + 2k\pi, \\ \frac{1-\varphi}{2} \leq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \end{cases} (k \in \mathbf{Z})$ , 解得  $\pi + 1 - 4k\pi \leq \varphi \leq 3\pi - 4k\pi, \because \varphi > 0, k \in \mathbf{Z},$

$\therefore \varphi$  的最小值为  $\pi + 1$ .

16.  $e^2$  【解析】易知  $a > 0$ , 由  $e^{x+1} - a \ln x \geq a(\ln a - 1)$  可得  $\frac{e^{x+1}}{a} + 1 - \ln a \geq \ln x$ , 即  $e^{x+1-\ln a} + 1 - \ln a \geq \ln x$ , 则有

$e^{x+1-\ln a} + x + 1 - \ln a \geq x + \ln x$ , 设  $h(x) = e^x + x$ , 易知  $h(x)$  单调递增,  $h(x+1-\ln a) \geq h(\ln x)$ , 所以  $x+1-\ln a \geq \ln x$ , 即  $x - \ln x \geq \ln a - 1$ , 设  $g(x) = x - \ln x$ , 易知  $g(x) \geq g(1) = 1$ , 则有  $1 \geq \ln a - 1$ , 解得  $0 < a \leq e^2$ , 故  $a$  的最大值为  $e^2$ .

17. 解: (1)  $A = \left(-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup [2, +\infty)$ , ..... 2 分

当  $a = \sqrt{3}$  时,  $B = \{x | \sqrt{x+1} < \sqrt{3}\} = [-1, 2)$ , ..... 4 分

则  $A \cap B = \left[-1, \frac{3}{2}\right]$ . ..... 6 分

(2) 若  $A \cup B = A$ , 则  $B \subseteq A$ . ..... 7 分

当  $B = \emptyset$ , 即  $a \leq 0$  时, 满足条件; ..... 9 分

当  $B \neq \emptyset$ , 即  $a > 0$  时,  $B = [-1, a^2 - 1)$ , 若  $B \subseteq A$ , 则需  $a^2 - 1 \leq \frac{3}{2}$ , 解得  $0 < a \leq \frac{\sqrt{10}}{2}$ ; ..... 11 分

综上所述, 实数  $a$  的取值范围为  $\left(-\infty, \frac{\sqrt{10}}{2}\right]$ . ..... 12 分

18. 解: (1)  $f(x) = 2\sqrt{3} - 4\sqrt{3} \cos^2\left(\omega x + \frac{\pi}{6}\right) - 4\sin \omega x \cos \omega x = -2\sqrt{3} \cos\left(2\omega x + \frac{\pi}{3}\right) - 2\sin 2\omega x = -\sqrt{3} \cos 2\omega x + \sin 2\omega x = 2\sin\left(2\omega x - \frac{\pi}{6}\right)$ , ..... 2 分

由题意知,  $f(x)$  的最小正周期为  $\pi$ , 所以  $\frac{2\pi}{2\omega} = \pi$ , 解得  $\omega = 1$ , ..... 3 分

$\therefore f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ ,  $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ , 解得  $\frac{\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{5\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbf{Z}$ , ..... 4 分

取  $k = 1$ , 则  $\frac{11\pi}{12} \leq x \leq \frac{17\pi}{12}$ , 取  $k = 0$ , 则  $-\frac{\pi}{12} \leq x \leq \frac{5\pi}{12}$ ,

所以  $f(x)$  在  $[0, \pi]$  上的单调递增区间为  $\left[0, \frac{5\pi}{12}\right], \left[\frac{11\pi}{12}, \pi\right]$ . ..... 6 分

(2) 由 (1) 知  $f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$ , 当  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  时,  $-\frac{\pi}{6} \leq 2x - \frac{\pi}{6} \leq \frac{5\pi}{6}$ , ..... 8 分

由  $y = \sin x$  的对称性可知,  $\left(2x_1 - \frac{\pi}{6}\right) + \left(2x_2 - \frac{\pi}{6}\right) = \pi$ , 解得  $x_1 + x_2 = \frac{5\pi}{6}$ , ..... 11 分

所以  $\cos \frac{x_1 + x_2}{2} = \cos \frac{5\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ . ..... 12 分

19. 解: (1) 当  $b = 0, a = 0$  时,  $f(x) = x^3 + 1, f'(x) = 3x^2 \geq 0$ , ..... 1 分

则  $f(x)$  在  $[2, 3]$  上单调递增, 所以  $f(x)$  在  $[2, 3]$  上的最大值为  $f(3) = 28$ . ..... 3 分

(2) 当  $b = \frac{a^2}{4}$  时,  $f(x) = x^3 - ax^2 + \frac{a^2}{4}x + 1, f'(x) = 3x^2 - 2ax + \frac{a^2}{4} = 3\left(x - \frac{a}{6}\right)\left(x - \frac{a}{2}\right)$ . ..... 4 分

① 当  $a = 0$  时,  $f(x) = x^3 + 1 = 0$ , 解得  $x = -1$ , 此时  $f(x)$  有 1 个零点; ..... 5 分

② 当  $a < 0$  时,  $\frac{a}{6} > \frac{a}{2}$ , 所以当  $x < \frac{a}{2}$  时,  $f'(x) > 0$ , 所以  $f(x)$  在  $\left(-\infty, \frac{a}{2}\right)$  上单调递增,

当  $\frac{a}{2} < x < \frac{a}{6}$  时,  $f'(x) < 0$ , 所以  $f(x)$  在  $\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{6}\right)$  上单调递减, 当  $x > \frac{a}{6}$  时,  $f'(x) > 0$ ,



所以  $f(x)$  在  $(\frac{a}{6}, +\infty)$  上单调递增, 所以  $f_{\min}(x) = f(\frac{a}{6}) = \frac{a^3}{54} + 1, f_{\max}(x) = f(\frac{a}{2}) = 1$ . ..... 7分

当  $-3\sqrt[3]{2} < a < 0$ , 即  $-54 < a^3 < 0$  时,  $f_{\min}(x) = f(\frac{a}{6}) = \frac{a^3}{54} + 1 > 0, f_{\max}(x) = f(\frac{a}{2}) = 1 > 0$ ,

$\therefore f(x)$  在  $(\frac{a}{2}, \frac{a}{6}), (\frac{a}{6}, +\infty)$  均没有零点, ..... 9分

$\because f(a-1) = \frac{1}{4}a^3 - \frac{5}{4}a^2 + 2a < 0$ , 即  $f(\frac{a}{2})f(a-1) < 0$ ,

所以  $f(x)$  在  $(a-1, \frac{a}{2})$  上有一个零点, 此时  $f(x)$  有一个零点. .... 11分

综上, 当  $-3\sqrt[3]{2} < a \leq 0$  时,  $f(x)$  有一个零点. .... 12分

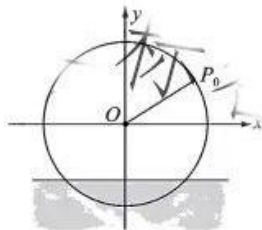
20. 解: 以筒车转轮的中心  $O$  为原点, 与水面平行的直线为  $x$  轴建立平面直角坐标系,

(1) 设  $h = M\sin(\omega t + \varphi) + N, t \in [0, 24]$ , 由题意知,  $2M = 8, M + N = 6, \therefore M = 4, N = 2$ , 即  $h = 4\sin(\omega t + \varphi) + 2$ , ..... 2分

当  $t = 0$  时,  $h = 4\sin \varphi + 2 = 4$ , 解得  $\sin \varphi = \frac{1}{2}$ , 结合图像可知  $\varphi = \frac{\pi}{6}$ , ..... 3分

又因为  $T = \frac{2\pi}{\omega} = 24$ , 所以  $\omega = \frac{\pi}{12}$ , ..... 4分

综上,  $h = 4\sin(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{6}) + 2, t \in [0, 24]$ . .... 5分



(2) 经过  $t$  s 后 A 距离水面的高度  $h = 4\sin(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{6}) + 2$ , 由题意知  $\angle AOB = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ , 所以经过  $t$  s 后 B 距离水

面的高度  $h' = 4\sin(\frac{\pi}{12}t - \frac{\pi}{12}) + 2$ , ..... 6分

则盛水筒 B 与盛水筒 A 的高度差为  $H = |h - h'| = 4 \left| \sin(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{6}) - \sin(\frac{\pi}{12}t - \frac{\pi}{12}) \right|$ ,

利用  $\sin \theta - \sin \varphi = 2\cos \frac{\theta + \varphi}{2} \sin \frac{\theta - \varphi}{2}, H = 4 \left| \sin(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{6}) - \sin(\frac{\pi}{12}t - \frac{\pi}{12}) \right| = 8\sin \frac{\pi}{8} \left| \cos(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{24}) \right|$ , ..... 8分

当  $\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{24} = k\pi, k \in \mathbf{Z}$ , 即  $t = -\frac{1}{2} + 12k, k \in \mathbf{Z}$  时,  $H$  取最大值  $8\sin \frac{\pi}{8}$  (m). ..... 10分

又因为  $t \in [0, 24]$ , 所以当  $t = 11.5$  或  $t = 23.5$  时,  $H$  取最大值, 综上, 盛水筒 B 与盛水筒 A 的高度差的最大值约为  $8\sin \frac{\pi}{8}$  m, 此时  $t = 11.5$  或  $t = 23.5$ . .... 12分

21. 解: (1)  $f(x) = \ln(x+1) - ax + 2$ , 定义域为  $(-1, +\infty)$ ,

令  $t = x+1 \in (0, +\infty)$ , 则  $f(x) = g(t) = \ln t - at + a + 2$ ,



令  $g(t) = \ln t - at + a + 2$ , 则  $g'(t) = \frac{1}{t} - a = \frac{-a(t - \frac{1}{a})}{t}$ , ..... 3分

由  $g'(t) = 0$ , 解得  $t = \frac{1}{a} > 0$ , 来源: 高三标答公众号

当  $0 < t < \frac{1}{a}$  时,  $g'(t) > 0$ , 所以  $g(t)$  在  $(0, \frac{1}{a})$  单调递增; ..... 4分

当  $t > \frac{1}{a}$  时,  $g'(t) < 0$ , 所以  $g(t)$  在  $(\frac{1}{a}, +\infty)$  单调递减,

即  $g(t)$  在  $(0, \frac{1}{a})$  单调递增, 在  $(\frac{1}{a}, +\infty)$  单调递减, ..... 5分

综上,  $f(x)$  的单调递增区间为  $(-1, \frac{1}{a} - 1)$ , 单调递减区间为  $(\frac{1}{a} - 1, +\infty)$ . ..... 6分

(2) 由题意得  $ax \leq (x+1)[\ln(x+1)+2]$ ,

令  $t = x+1 \in [1, +\infty)$ , 则  $a(t-1) \leq t(\ln t + 2)$

当  $t=1$  时,  $a \cdot 0 \leq 2, a \in \mathbf{R}$ ; ..... 7分

当  $t > 1$  时,  $a \leq \frac{t(\ln t + 2)}{t-1}$ , 设  $h(t) = \frac{t(\ln t + 2)}{t-1}$ , ..... 8分

$h'(t) = \frac{t-3-\ln t}{(t-1)^2}$ , 设  $\varphi(t) = t-3-\ln t, \varphi'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t} > 0$ , 则  $\varphi(t)$  在  $(1, +\infty)$  单调递增, ..... 9分

$\varphi(4) = 1 - \ln 4 < 0, \varphi(5) = 2 - \ln 5 > 0$ , 所以存在  $t_0 \in (4, 5)$  使得  $\varphi(t_0) = 0$ , 即  $t_0 - 3 = \ln t_0$ .

则有  $h(t)$  在  $(0, t_0)$  单调递减, 在  $(t_0, +\infty)$  单调递增,  $h(t) \geq h(t_0)$ ,

所以  $a \leq h(t_0) = \frac{t_0(\ln t_0 + 2)}{t_0 - 1} = \frac{t_0(t_0 - 1)}{t_0 - 1} = t_0$ , ..... 10分

因为  $t_0 \in (4, 5)$ , 所以整数  $a$  的最大值为 4. ..... 12分

22. 解: (1) 由  $\alpha = \frac{\pi}{6}$  知, 曲线  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y = -2 + \frac{1}{2}t, \end{cases}$  可得曲线  $C_1$  的普通方程为  $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 2$ . ..... 2分

由曲线  $C_2$  的极坐标方程为  $\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ , 化简得  $\rho \sin \theta + \rho \cos \theta = 2$ , 由  $x = \rho \sin \theta, y = \rho \cos \theta$  知, 曲线  $C_2$  的直角坐标方程为  $x + y = 2$ . ..... 4分

(2) 将  $\theta = 0$  代入  $\rho \sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ , 得  $\rho = 2$ , 所以点  $A$  的直角坐标为  $(2, 0)$ , ..... 5分

故直线  $AP$  是倾斜角为  $\frac{\pi}{4}$  的直线, 且  $|PA| = 2\sqrt{2}$ , 因为点  $B$  是曲线  $C_1$  与曲线  $C_2$  的交点, 且满足  $\angle APB = \frac{\pi}{6}$ ,

则直线  $C_1$  的倾斜角为  $\frac{\pi}{12}$  或  $\frac{5\pi}{12}$ . ..... 7分

将  $\begin{cases} x = t \cos \alpha, \\ y = -2 + t \sin \alpha, \end{cases}$  代入曲线  $C_2$  的直角坐标方程为  $x + y = 2$ , 得  $t = \frac{4}{\cos \alpha + \sin \alpha}$ ,

当  $\alpha = \frac{\pi}{12}$  时,  $t = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ ; ..... 8分

- 当  $\alpha = \frac{5\pi}{12}$  时,  $t = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ , 所以  $|PB| = \frac{4\sqrt{6}}{3}$ , ..... 9 分
- 从而  $S_{\triangle APB} = \frac{1}{2}|PA||PB|\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \frac{4\sqrt{6}}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ . ..... 10 分
23. 解 (1) 当  $a = -1$  时,  $f(x) = |x+2| + |x|$ , ..... 1 分
- 当  $x \geq 0$  时,  $f(x) = x+2 + x \leq 2x+3$ , 即  $2 \leq 3$ , 恒成立, 所以  $x \geq 0$ ; ..... 2 分
- 当  $-2 \leq x < 0$  时,  $f(x) = x+2 - x = 2 \leq 2x+3$ , 解得  $x \geq -\frac{1}{2}$ , 所以  $-\frac{1}{2} \leq x < 0$ ; ..... 3 分
- 当  $x < -2$  时,  $f(x) = -2x-2 \leq 2x+3$ , 解得  $x \geq -\frac{5}{4}$ , 所以无解. .... 4 分
- 综上, 不等式  $f(x) \leq 2x+3$  的解集为  $[-\frac{1}{2}, +\infty)$ . ..... 5 分
- (2)  $f(x) = |x-2a| + |x+a+1| \geq |(x-2a) - (x+a+1)| = |3a+1|$ , 当且仅当  $(x-2a)(x+a+1) \leq 0$  时等号成立, ..... 7 分
- 由题意得  $|3a+1| \geq |2a-1|$ , 两边平方化简得  $a^2+2a \geq 0$ , 解得  $a \leq -2$  或  $a \geq 0$ , ..... 9 分
- 所以  $a$  的取值范围是  $(-\infty, -2] \cup [0, +\infty)$ . ..... 10 分

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京, 旗下拥有网站 (网址: [www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)) 和微信公众平台等媒体矩阵, 用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长, 在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南, 请关注自主选拔在线官方微信号: [zizzsw](https://www.zizzs.com)。

