成都市2020级高中毕业班第三次诊断性检测

数学(理科)参考答案及评分意见

第Ⅰ卷 (选择题,共60分)

一、选择题:(每小题5分,共60分)

1.C; 2.B; 3.A; 4.C; 5.A; 6.B; 7.D; 8.C; 9.D; 10.D; 11.A; 12.B.

第Ⅱ卷 (非选择题,共90分)

二、填空题:(每小题5分,共20分)

13. $\frac{1}{2}$; 14.81; 15.10; 16. $\frac{3\sqrt{3}}{16}$.

三、解答题:(共70分)

17.解:(Ⅰ)由题得 $\bar{x}=\frac{1}{5}(9+9.5+10+10.5+11)=10$, ……1分

$\bar{y}=\frac{1}{5}(11+10+8+6+5)=8$. ……2分

$\because \sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})=-8, \sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=2.5, \sum\limits_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2=26$, ……5分

$\therefore r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}=\dfrac{-8}{\sqrt{65}}\approx -0.99$.

$\because y$ 与 x 的相关系数近似为 -0.99,说明 y 与 x 的线性相关性很强,从而可以用线性回归模型拟合 y 与 x 的关系. ……6分

(Ⅱ)$\because \hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{(x_i-\bar{x})^2}=\dfrac{-8}{2.5}=-3.2, \hat{a}=\bar{y}+3.2\bar{x}=40$, ……9分

$\therefore y$ 关于 x 的线性回归方程为 $\hat{y}=-3.2x+40$. ……10分

当 $x=8.5$ 时,$\hat{y}=12.8$.

$\therefore$ 当产品定价为8.5元时,预测销量可达到12.8万件. ……12分

18. 解:(Ⅰ)如图,设 P 是 CG 的中点,连接 PM,PN.

$\because M$ 为 AC 的中点,$\therefore PM/\!/AG$.

又 $PM\not\subset$ 平面 AGF,$AG\subset$ 平面 AGF,

$\therefore PM/\!/$ 平面 AGF. ……2分

同理可得,$PN/\!/$ 平面 AGF.

$\because PM\cap PN=P$,$PM,PN\subset$ 平面 PMN,

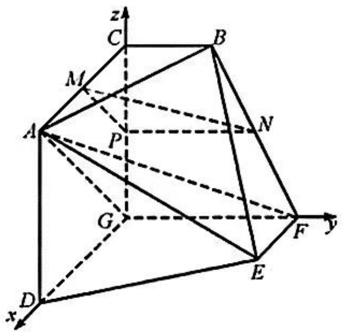
$\therefore$ 平面 $PMN/\!/$ 平面 AGF. ……5分

又 $MN\subset$ 平面 PMN，$\therefore MN\,/\!/$ 平面 AGF. ……6 分

（Ⅱ）$\because FG\perp$ 平面 $ADGC$，CG，$DG\subset$ 平面 $ADGC$，

$\therefore FG\perp CG$，$FG\perp DG$.

以 G 为坐标原点，$\overrightarrow{GD}$，$\overrightarrow{GF}$，$\overrightarrow{GC}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴正方向，建立如图所示的空间直角坐标系 $Gxyz$. 不妨设 $BC=1$，则 $G(0,0,0)$，$M(1,0,2)$，



$N(0,\frac{3}{2},1)$；$B(0,1,2)$，$E(1,2,0)$，$F(0,2,0)$，

$\overrightarrow{MN}=(-1,\frac{3}{2},-1)$，$\overrightarrow{BE}=(1,1,-2)$，$\overrightarrow{BF}=(0,1,-2)$.

……8 分

设平面 BEF 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$.

由 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BE}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{BF}=0\end{cases}$ 得 $\begin{cases}x+y-2z=0,\\ y-2z=0.\end{cases}$

令 $z=1$，得 $\boldsymbol{n}=(0,2,1)$. ……10 分

设 MN 与平面 BEF 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos\langle\boldsymbol{n},\overrightarrow{MN}\rangle|=\dfrac{|\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{MN}|}{|\boldsymbol{n}||\overrightarrow{MN}|}=\dfrac{2}{\frac{\sqrt{17}}{2}\times\sqrt{5}}=\dfrac{4\sqrt{85}}{85}$.

$\therefore$ 直线 MN 与平面 BEF 所成角的正弦值为 $\dfrac{4\sqrt{85}}{85}$. ……12 分

19. 解：（Ⅰ）$\because \sqrt{3}c+a=b\cos C-c\cos B$，

由正弦定理有 $\sqrt{3}\sin C+\sin A=\sin B\cos C-\sin C\cos B$. ……2 分

$\because \sin A=\sin(B+C)$，

$\therefore \sqrt{3}\sin C+\sin B\cos C+\sin C\cos B=\sin B\cos C-\sin C\cos B$. ……4 分

$\therefore 2\sin C\cos B+\sqrt{3}\sin C=0$. ……5 分

又 $C\in(0,\pi)$，$\therefore \sin C\neq 0$.

$\therefore \cos B=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

又 $B\in(0,\pi)$，$\therefore B=\dfrac{5\pi}{6}$. ……6 分

（Ⅱ）在 $\triangle BCD$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle BDC=\dfrac{BD^2+CD^2-BC^2}{2BD\cdot CD}=\dfrac{2b^2-9a^2}{2b^2}$.

在 $\triangle ABD$ 中，由余弦定理得 $\cos\angle BDA=\dfrac{BD^2+AD^2-AB^2}{2AD\cdot BD}=\dfrac{5b^2-9c^2}{4b^2}$.

$\because \angle BDC+\angle BDA=180^\circ$，$\therefore \cos\angle BDC=-\cos\angle BDA$.

即 $\dfrac{2b^2-9a^2}{2b^2}=-\dfrac{5b^2-9c^2}{4b^2}$，整理得 $b^2=c^2+2a^2$. ……9 分

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $\cos B=\dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

则$-\frac{a^2}{2ac}=-\frac{a}{2c}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$. $\therefore a=\sqrt{3}c$.

$\therefore b^2-c^2=6c^2$，即$b=\sqrt{7}c$. ……11分

$\therefore \cos\angle BDA=\frac{5b^2-9c^2}{4b^2}=\frac{13}{14}$. ……12分

20.解：(Ⅰ)设$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，其中$x_1\neq x_2$.

由$\begin{cases}y_1^2=4x_1\\y_2^2=4x_2\end{cases}$，得$y_1^2-y_2^2=4x_1-4x_2$. 化简得$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{4}{y_1+y_2}$. ……2分

$\therefore \sqrt{3}=\frac{4}{y_1+y_2}$，即$\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$\therefore$线段PQ中点纵坐标的值为$\frac{2\sqrt{3}}{3}$. ……4分

(Ⅱ)设$P(\frac{y_1^2}{4},y_1)$，$Q(\frac{y_2^2}{4},y_2)$，$M(\frac{y_3^2}{4},y_3)$，$N(\frac{y_4^2}{4},y_4)$.

$\therefore k_{PM}=\frac{y_1-y_3}{\frac{y_1^2}{4}-\frac{y_3^2}{4}}=\frac{4}{y_1+y_3}$. ……6分

$\therefore$直线PM的方程为$y-y_1=\frac{4}{y_1+y_3}(x-\frac{y_1^2}{4})$，化简可得$(y_1+y_3)y-4x-y_1y_3=0$.

$\because T(\sqrt{3},0)$在直线PM上，解得$y_1y_3=-4\sqrt{3}$. ……8分

同理，可得$y_2y_4=-4\sqrt{3}$.

$\therefore k_{PQ}=\frac{4}{y_1+y_2}=\frac{4}{\frac{-4\sqrt{3}}{y_3}+\frac{-4\sqrt{3}}{y_4}}=\frac{y_3y_4}{-\sqrt{3}(y_3+y_4)}=\sqrt{3}$. ……10分

$\therefore y_3y_4=-3(y_3+y_4)$.

又直线MN的方程为$(y_3+y_4)y-4x-y_3y_4=0$，即$(y_3+y_4)(y+3)-4x=0$.

$\therefore$直线MN恒过定点$(0,-3)$. ……12分

21.解：(Ⅰ)当$a=1$时，函数$f(x)=x^4-x^3\sin x$.

$\therefore f'(x)=4x^3-(3x^2\sin x+x^3\cos x)$. $\therefore f'(\pi)=5\pi^3$. ……3分

$\therefore$曲线$y=f(x)$在点(π,π^4)处的切线方程为$5\pi^3x-y-4\pi^4=0$. ……4分

(Ⅱ)由题知$f(x)=x^3(x-a\sin x)$，不妨设$g(x)=x-a\sin x$.

$\therefore g'(x)=1-a\cos x$. ……5分

(i)当$a\leqslant 1$时，不妨设$x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

$\because \cos x\in(0,1)$. $\therefore g'(x)>0$在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$上恒成立.

$\therefore g(x)$在$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$上单调递增. ……6分

又$g(0)=0$,

$\therefore$当 $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$时,$g(x)<g(0)=0$;当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$时,$g(x)>g(0)=0$. ……7 分

$\because f(x)=x^3g(x)$,

$\therefore f'(x)=3x^2g(x)+x^3g'(x)$.

$\therefore$当 $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$时,$f'(x)<0$,即 $f(x)$在$(-\frac{\pi}{2},0)$上单调递减;

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$时,$f'(x)>0$,即 $f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递增.

$\therefore x=0$是函数 $f(x)$的极小值点. ……9 分

(ii)当 $a>1$ 时,不妨设 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

$\therefore \exists x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$,使得 $g'(x_0)=0$,且 $x\in(0,x_0)$,$g'(x)<0$.

$\therefore g(x)$在$(0,x_0)$上单调递减. ……10 分

$\therefore$当 $x\in(0,x_0)$时,$g(x)<g(0)=0$.

$\therefore$当 $x\in(0,x_0)$时,$f'(x)=3x^2g(x)+x^3g'(x)<0$.

$\therefore f(x)$在 $x\in(0,x_0)$上单调递减. ……11 分

$\therefore x=0$不是函数 $f(x)$的极小值点.

综上所述,当 $x=0$是函数 $f(x)$的极小值点时,a 的取值范围为$(-\infty,1]$. ……12 分

22. 解:(Ⅰ)由直线 l 的参数方程,得直线 l 的普通方程为 $2x+3y-8=0$. ……2 分

将 $\rho^2=x^2+y^2$,$\rho\sin\theta=y$ 代入曲线 C 的极坐标方程

化简得曲线 C 的直角坐标方程为$\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……5 分

(Ⅱ)由(Ⅰ),设点 $P(2\cos\alpha,\sin\alpha)$. ……6 分

由题知$|PQ|$的最小值为点 P 到直线 l 的距离的最小值.

又点 P 到直线 l 的距离 $d=\frac{|4\cos\alpha+3\sin\alpha-8|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{|5\sin(\alpha+\varphi)-8|}{\sqrt{13}}$,其中 $\tan\varphi=\frac{4}{3}$.

……8 分

当 $\alpha+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$时,$d$ 的最小值为$\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

$\therefore|PQ|$的最小值为$\frac{3\sqrt{13}}{13}$. ……10 分

23. 解:(Ⅰ)$\because f(1)=3$,$f(n)=3$,且 $n>1$,

$\therefore 3+|1-m|=3$,解得 $m=1$.

$\therefore f(x)=3|x-2|+|x-1|$. ……2 分

$\therefore 3|n-2|+|n-1|=3$.

(i)当 $1<n\leqslant 2$ 时,由 $3(2-n)+(n-1)=5-2n=3$,解得 $n=1$(不合题意,舍去);

(ii)当 $n>2$ 时,由 $3(n-2)+(n-1)=4n-7=3$,解得 $n=\frac{5}{2}$,经检验满足题意.

$\therefore$ 当 $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$ 时，$g(x)<g(0)=0$；当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$g(x)>g(0)=0$. ……7分

$\because f(x)=x^3g(x)$，

$\therefore f'(x)=3x^2g(x)+x^3g'(x)$.

$\therefore$ 当 $x\in(-\frac{\pi}{2},0)$ 时，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2},0)$ 上单调递减；

当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$f'(x)>0$，即 $f(x)$ 在 $(0,\frac{\pi}{2})$ 上单调递增.

$\therefore x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点. ……9分

(ii)当 $a>1$ 时，不妨设 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$.

$\therefore\exists x_0\in(0,\frac{\pi}{2})$，使得 $g'(x_0)=0$，且 $x\in(0,x_0)$，$g'(x)<0$.

$\therefore g(x)$ 在 $(0,x_0)$ 上单调递减. ……10分

$\therefore$ 当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)<g(0)=0$.

$\therefore$ 当 $x\in(0,x_0)$ 时，$f'(x)=3x^2g(x)+x^3g'(x)<0$.

$\therefore f(x)$ 在 $x\in(0,x_0)$ 上单调递减. ……11分

$\therefore x=0$ 不是函数 $f(x)$ 的极小值点.

综上所述，当 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的极小值点时，a 的取值范围为 $(-\infty,1]$. ……12分

22.解：(Ⅰ)由直线 l 的参数方程，得直线 l 的普通方程为 $2x+3y-8=0$. ……2分

将 $\rho^2=x^2+y^2$，$\rho\sin\theta=y$ 代入曲线 C 的极坐标方程

化简得曲线 C 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$. ……5分

(Ⅱ)由(Ⅰ)，设点 $P(2\cos\alpha,\sin\alpha)$. ……6分

由题知 $|PQ|$ 的最小值为点 P 到直线 l 的距离的最小值.

又点 P 到直线 l 的距离 $d=\frac{|4\cos\alpha+3\sin\alpha-8|}{\sqrt{2^2+3^2}}=\frac{|5\sin(\alpha+\varphi)-8|}{\sqrt{13}}$，其中 $\tan\varphi=\frac{4}{3}$.

……8分

当 $\alpha+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$ 时，d 的最小值为 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$.

$\therefore|PQ|$ 的最小值为 $\frac{3\sqrt{13}}{13}$. ……10分

23.解：(Ⅰ)$\because f(1)=3$，$f(n)=3$，且 $n>1$，

$\therefore 3+|1-m|=3$，解得 $m=1$.

$\therefore f(x)=3|x-2|+|x-1|$. ……2分

$\therefore 3|n-2|+|n-1|=3$.

(i)当 $1<n\leqslant 2$ 时，由 $3(2-n)+(n-1)=5-2n=3$，解得 $n=1$(不合题意，舍去)；

(ii)当 $n\geqslant 2$ 时，由 $3(n-2)+(n-1)=4n-7=3$，解得 $n=\frac{5}{2}$，经检验满足题意.

综上所述，$m=1,n=\frac{5}{2}$.　　……5分

(Ⅱ)由(Ⅰ)得 $m=1$. $\therefore a^2+b^2+c^2=1$.

$\because \left(\frac{a^4}{b^2+1}+\frac{b^4}{c^2+1}+\frac{c^4}{a^2+1}\right)(a^2+1+b^2+1+c^2+1)\geqslant(a^2+b^2+c^2)^2$,　　……8分

$\therefore \frac{a^4}{b^2+1}+\frac{b^4}{c^2+1}+\frac{c^4}{a^2+1}\geqslant\frac{1}{1+3}=\frac{1}{4}$. 当且仅当 $\frac{a^4}{(b^2+1)^2}=\frac{b^4}{(c^2+1)^2}=\frac{c^4}{(a^2+1)^2}$，即 $a=b=c=\frac{3}{3}$ 时等号成立.

$\therefore \frac{a^4}{b^2+1}+\frac{b}{c^2+1}+\frac{c}{a^2+1}\geqslant\frac{1}{4}$.　　……10分