

绝密★启用前

2023 年普通高等学校招生全国统一考试

数学预测卷(八)

命题报告

命题人解读:试卷着重考查考生对基础知识、基本方法、基本技能和基本活动经验的掌握情况,突出考查考生独立思考及综合运用数学思想、数学方法分析问题和解决问题的能力,在具体内容和难度设计上明显的梯度,重点突出,设计布局科学合理.

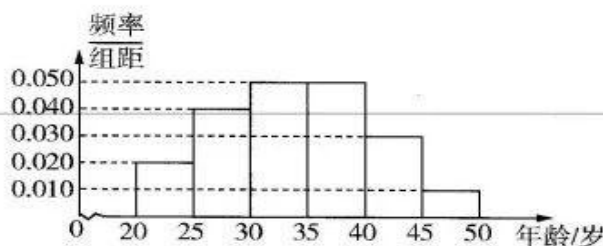
命题新情境:高考试题重视对数学思想方法的考查,第 21 题以函数与不等式为载体考查化归与转化思想.

亮点新试题:高考命题注重试题的综合性、创新性,第 12 题将函数与数列知识相结合.

本试卷共 22 题,满分 150 分.考试用时 120 分钟.

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

- 已知集合 $M = \{x | y = \sqrt{3x - x^2}\}$, $N = \{x | 2x - 1 > 0\}$, 则 $M \cup N =$
A. $\{x | x > \frac{1}{2}\}$ B. $\{x | 0 \leq x < \frac{1}{2}\}$
C. $\{x | x \geq 0\}$ D. $\{x | 0 \leq x \leq 3\}$
- 若 $(1 - z)i^3 = -2$, 则 $|z| =$
A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{5}$ C. $\sqrt{7}$ D. 3
- 某机构从一次“喜迎二十大”网络宣讲直播活动中,随机选取了部分参与直播活动的网友进行调查,其年龄(单位:岁)的频率分布直方图如图所示,以样本估计总体,估计参与直播活动的网友年龄的中位数为



- 31 岁 B. 32 岁 C. 33 岁 D. 34 岁
- 在平行四边形 $ABCD$ 中, E 为 BC 的中点, 记 $\overrightarrow{AE} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{DE} = \mathbf{b}$, 则 $\overrightarrow{AC} =$
A. $\frac{1}{2}\mathbf{a} + \frac{3}{2}\mathbf{b}$ B. $\frac{3}{2}\mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$ C. $\frac{3}{2}\mathbf{a} - \frac{1}{2}\mathbf{b}$ D. $\frac{1}{2}\mathbf{a} - \frac{3}{2}\mathbf{b}$
- 若直线 $2x - y - 2 = 0$ 与直线 $2x - y - 1 = 0$ 被圆 $C: x^2 + y^2 - 2x - 6y - m = 0 (m > -10)$ 截得的弦长之比为 $1:\sqrt{2}$, 则圆 C 的面积为
A. 2π B. $\frac{14}{5}\pi$ C. 3π D. $\frac{16}{5}\pi$

6. 已知 $\tan(\alpha + \frac{\pi}{6}) = -3$, 则 $\sin(2\alpha + \frac{\pi}{12}) =$

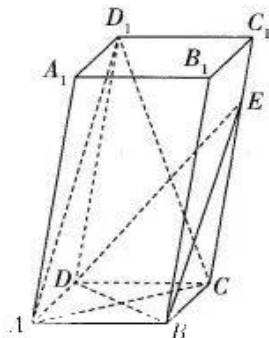
- A. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ B. $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ C. $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ D. $\frac{\sqrt{2}}{10}$

7. 设 $a = \frac{1}{4}\sin\frac{1}{4} - \cos\frac{1}{5}$, $b = \frac{1}{5}\sin\frac{1}{5} - \cos\frac{1}{4}$, $c = (\frac{1}{4})^{\frac{1}{5}}$, 则

- A. $a < c < b$ B. $a < b < c$ C. $b < c < a$ D. $b < a < c$

8. 如图, 已知四棱柱 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的体积为 V , 四边形 $ABCD$ 为平行四边形, 点 E 在 CC_1 上且 $CE = 3EC_1$, 则三棱锥 $D_1 - ADC$ 与三棱锥 $E - BCD$ 的公共部分的体积为

- A. $\frac{V}{28}$
B. $\frac{V}{21}$
C. $\frac{3V}{28}$
D. $\frac{V}{7}$



二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 某校开展“一带一路”知识竞赛, 甲组有 8 名选手, 其中 5 名男生, 3 名女生; 乙组有 8 名选手, 其中 4 名男生, 4 名女生. 现从甲组随机抽取 1 人加入乙组, 再从乙组随机抽取 1 人, A_1 表示事件“从甲组抽取的是男生”, A_2 表示事件“从甲组抽取的是女生”, B 表示事件“从乙组抽取 1 名女生”, 则

- A. A_1, A_2 不是对立事件 B. $P(B) = \frac{35}{72}$
C. $P(\bar{B}|A_1) = \frac{5}{9}$ D. $P(B|A_1) = \frac{4}{9}$

10. 在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中, 直线 B_1D 与平面 ABB_1A_1 、平面 BCC_1B_1 所成的角均为 30° , 则

- A. $AB = BC$ B. $AB = CC_1$
C. 直线 A_1C 与平面 CDD_1C_1 所成的角为 60° D. 直线 A_1C 与 AD 所成的角为 60°

11. 已知 F_1, F_2 分别为椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左、右焦点, 过 F_1 的直线与 C 交于 A, B 两点,

若 $|AB| = 4|BF_1|$, $|BF_2| = \frac{5}{3}|AF_2|$, 则

- A. $\tan \angle AF_2B = \frac{4}{3}$
B. C 的离心率为 $\frac{1}{2}$
C. 若 C 的短轴长为 2, 则 C 的方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$
D. 直线 BF_2 的斜率的绝对值为 $\frac{\sqrt{3}}{7}$



12. 已知函数 $f(x) = |x|^3 - a^x$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 有三个不同的零点 x_1, x_2, x_3 , 若 $x_1 < x_2 < 0 < x_3$, 则

- A. $x_3 > 1$
- B. 当 x_2 为 $x_1, -x_3$ 的等比中项时, x_2 为 x_1, x_3 的等差中项
- C. 当 x_2 为 x_1, x_3 的等差中项时, $x_3 = (2\sqrt{2} - 3)x_1$
- D. 实数 a 的取值范围为 $(e^{-\frac{3}{2}}, 1)$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} f(x + \frac{3}{2}), & x \leq 0, \\ x + \log_2 x, & x > 0, \end{cases}$ 则 $f(-\frac{23}{8}) =$ _____.

14. $(x - \frac{2x^2}{3})(y - x)^7$ 的展开式中 $x^4 y^4$ 的系数为 _____ (用数字作答)

15. 已知 T 是 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的最小正周期. 若 $f(\frac{T}{4}) = 1, x = \frac{\pi}{6}$ 是 $f(x)$ 的一个极大值点, 则当 ω 取得最小值时, $f(\frac{3\pi}{2}) =$ _____.

16. 已知 A, B, C, D 为抛物线 $E: y^2 = 2px$ ($p > 0$) 上不同的四点, 直线 AB, CD 交于点 $Q(4, 0)$, 直线 AD 经过 E 的焦点 F , 若直线 AD 的斜率为直线 BC 斜率的 4 倍, 则 $p =$ _____.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)

已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 公比 $q > 0, S_3 = 13, a_3 - a_2 = 6$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 求数列 $\{\frac{\log_3 a_n}{a_n}\}$ 的前 n 项和 T_n .

18. (12 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $2\sin C - \sin B = \tan A \cos B$.

(1) 求 A ;

(2) 若 $a = 2$, 求 $2c - b$ 的取值范围.

19. (12 分)

下表为 2015—2021 年中国数字经济规模(单位:万亿元)及 2022—2024 年中国数字经济规模预测统计表,记 2015—2024 年对应的代码分别为 1~10.

年份	2015 年	2016 年	2017 年	2018 年	2019 年	2020 年	2021 年	2022 年	2023 年	2024 年
年份代码 x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
中国数字经济规模 y /万亿元	18.6	22.6	27.2	31.3	35.8	39.2	45.5	54.3	60.6	68.3

(1) 根据 2015—2021 年的数据知可用线性回归模型拟合中国数字经济规模 y 与年份代码 x 之间的关系,求 y 关于 x 的线性回归方程 $\hat{y} = \hat{b}x + \hat{a}$ (系数精确到 0.01);

(2) 对于未来 n 年的变化,通过两种不同模型预测得到两组数据 $(1, a_1), (2, a_2), \dots, (n, a_n)$ 与 $(1, b_1), (2, b_2), \dots, (n, b_n)$, 记 M 为数据 $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ 中的最大值,若 $\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2} \leq 0.1M$, 则称这两组数据相吻合,利用(1)中求得的线性回归方程对 2022—2024 年的中国数字经济规模进行预测,判断所得预测数据与表中预测数据是否吻合.

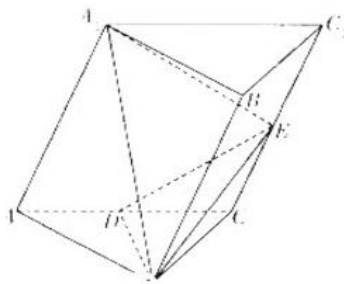
参考数据: $\sum_{i=1}^7 y_i = 220.2$, $\sum_{i=1}^7 x_i y_i = 1\ 003.3$.

参考公式:线性回归方程 $\hat{y} = \hat{a} + \hat{b}x$ 中,斜率与截距的最小二乘估计公式分别为 $\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i - n \bar{x} \bar{y}}{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n \bar{x}^2}$,
 $\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \bar{x}$.

20. (12 分)

如图,三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 的底面为等边三角形, $AA_1 = AC$, 点 D, E 分别为 AC, CC_1 的中点, $\angle CED = 30^\circ$, $A_1B = \sqrt{2}BD = \sqrt{6}$.

- (1) 求点 A_1 到平面 BDE 的距离;
(2) 求二面角 $A_1 - BE - D$ 的余弦值.





21. (12 分)

已知函数 $f(x) = (x+4)e^x - x^2 + 6x$, $g(x) = \ln x - (a+1)x$, $a > -1$.

(1) 求 $f(x)$ 的极值;

(2) 若存在 $x_1 \in [1, 3]$, 对任意的 $x_2 \in [e^2, e^3]$, 使得不等式 $g(x_2) > f(x_1)$ 成立, 求实数 a 的取值范围. ($e^3 \approx 20.09$)

22. (12 分)

已知 F_1, F_2 分别为双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点, 点 $P(3, 1)$ 在 C 上, 且 $|PF_1| - |PF_2| = 2\sqrt{6}$.

(1) 求 C 的标准方程;

(2) 设点 P 关于坐标原点的对称点为 Q , 过点 P 且斜率为 $\frac{1}{3}$ 的直线与 C 相交于 M, N 两点, 直

线 PM 与 QN 交于点 $D(x_0, y_0)$, 求 $\frac{y_0}{x_0}$ 的值.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（网址：www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

Q 自主选拔在线