下关一中教育集团 2022~2023 学年高一年级下学期段考(二)
数学参考答案

第Ⅰ卷（选择题，共 60 分）

一、单项选择题（本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分．在每小题所给出的四个选项中，只有一项符合题目要求）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	C	A	B	B	D	D	A	D

【解析】

1．复数 z 在复平面内对应的点为 $(2,\ -1)$，则 $z=2-\mathrm{i}$，所以 $\dfrac{2\mathrm{i}}{z-1}=\dfrac{2\mathrm{i}}{(2-\mathrm{i})-1}=\dfrac{2\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}=\dfrac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}$

$=\dfrac{2\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{2}=\mathrm{i}(1+\mathrm{i})=-1+\mathrm{i}$，故选 C．

2．∵甲是乙的必要条件，∴乙能推出甲；∵丙是乙的充分条件，但不是乙的必要条件，∴丙能推出乙，乙不能推出丙，所以丙能推出甲，甲不能推出丙，所以丙是甲的充分不必要条件（如图 1），故选 A．

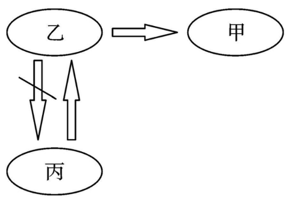

图 1

3．由于 $a<c$，所以 A 是锐角，由正弦定理得 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{c}{\sin C}$，$\dfrac{4\sqrt{3}}{\sin A}=\dfrac{12}{\sin\dfrac{\pi}{3}}$，解得 $\sin A=\dfrac{1}{2}$，

所以 $A=\dfrac{\pi}{6}$，故选 B．

4．因为 $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递减，又 $2022>1$，所以 $a=\log_{\frac{1}{3}}2022<\log_{\frac{1}{3}}1=0$，因为 $y=\log_{2022}x$ 在 $(0,\ +\infty)$ 上单调递增，又 $2023>2022$，所以 $b=\log_{2022}2023>\log_{2022}2022=1$，因为 $c=2022^{-2022}=\dfrac{1}{2022^{2022}}$，所以 $0<c<1$，所以 $b>c>a$，故选 B．

5．由题意可得，球的内接三棱锥即三棱锥的外接球即长宽高分别为 3cm，2cm 和 $\sqrt{3}$cm 的长方体的外接球，又长方体的体对角线长为外接球的直径，所以球的半径 $R=\dfrac{\sqrt{3^2+2^2+(\sqrt{3})^2}}{2}$

$=\dfrac{4}{2}=2$，球的体积为 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3=\dfrac{32}{3}\pi\mathrm{cm}^3$，故选 D．

6．这组数据从小到大排为8.2，8.4，8.4，8.5，8.6，8.7，8.8，8.8，8.9，9.2，9.3，9.4（易错：对12个数据一定要从小到大排序的情况下进行数据分析），则极差为$9.4-8.2=1.2$，故选项A错误；由于众数为8.4和8.8，故选项B错误；由于$12\times80\%=9.6$，则80%分位数为9.2，故选项C错误；由于$12\times75\%=9$，则第三四分位数为$\dfrac{8.9+9.2}{2}=9.05$，故选项D正确，故选D．

7．$f(x)=\begin{vmatrix}10 & 5\\ 2 & \sin(\omega x+\varphi)\end{vmatrix}=10\sin(\omega x+\varphi)-10$，因为$\sqrt{3}\sin\varphi=\cos\varphi$，所以，$\tan\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，而$0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}$，所以$\varphi=\dfrac{\pi}{6}$，即$f(x)=10\sin\left(\omega x+\dfrac{\pi}{6}\right)-10$，当$x\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$时，$\dfrac{\pi}{6}<\omega x+\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\pi}{2}\omega+\dfrac{\pi}{6}$，因为$f(x)$在$\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$上单调递增，所以，$\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}\omega+\dfrac{\pi}{6}\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\ \omega>0,\end{cases}$ 解得$0<\omega\leqslant\dfrac{2}{3}$，当$\omega$取最大值$\dfrac{2}{3}$时，$f(x)$的最小正周期$T=\dfrac{2\pi}{\frac{2}{3}}=3\pi$，故选A．

8．令$g(x)=xf(x)$，由题意知$g(x)$在$[0,+\infty)$上为减函数，又$f(x)$为$\mathbf{R}$上的偶函数，所以$g(x)$为$\mathbf{R}$上的奇函数，又$g(x)$在$[0,+\infty)$上为减函数，$g(0)=0$，所以$g(x)$在$\mathbf{R}$上为减函数，①当$t>0$时，$\dfrac{1}{t}f\left(\dfrac{1}{t}\right)>(2t-1)f(2t-1)$，即$g\left(\dfrac{1}{t}\right)>g(2t-1)$，所以$\dfrac{1}{t}<2t-1$，所以$1<2t^2-t$，解得$t>1$；②当$t<0$时，$\dfrac{1}{t}f\left(\dfrac{1}{t}\right)<(2t-1)f(2t-1)$，即$g\left(\dfrac{1}{t}\right)<g(2t-1)$，所以$\dfrac{1}{t}>2t-1$，所以$1<2t^2-t$，解得$t<-\dfrac{1}{2}$，所以$t<-\dfrac{1}{2}$或$t>1$，故选D．

二、多项选择题（本大题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的选项中，有多项是符合题目要求的．全部选对的得5分，部分选对的得2分，有选错的得0分）

题号	9	10	11	12
答案	BCD	ACD	BCD	ABD

【解析】

9．因每一种型号的轿车数量较多，不适合用抽签法，故A错误；在按比例分配的分层随机抽样中，抽样比为$\dfrac{46}{1200+6000+2000}=\dfrac{1}{200}$，故B正确；在按比例分配的分层随机抽样中，三种型号的轿车应依次抽取6辆、30辆、10辆，故C正确；在按比例分配的分层随机抽样中，每一辆被抽到的概率是相等的，故D正确，故选BCD．

10．对于 A，因为$\vec{a}=(-2,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 3)$，所以不存在实数λ使得$\vec{a}=\lambda\vec{b}$，所以$\vec{a}$与$\vec{b}$能作为一组基底，故 A 正确；对于 B，因为$\vec{a}=(-2,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 3)$，所以$\vec{a}+\vec{b}=(-3,\ 4)$，所以与$\vec{a}+\vec{b}$同向的单位向量的坐标为$\frac{1}{5}\times(-3,\ 4)=\left(-\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$，故 B 错误；对于 C，因为$\cos\langle\vec{a},\ \vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{(-2)\times(-1)+1\times3}{\sqrt{(-2)^2+1^2}\times\sqrt{(-1)^2+3^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，所以$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角的正弦值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，故 C 正确；对于 D，因为$\vec{c}=(x,\ x)$，$|\vec{a}+\vec{c}|=|\vec{b}-\vec{c}|$，所以$(-2+x)^2+(1+x)^2=(-1-x)^2+(3-x)^2$，解得$x=\frac{5}{2}$，故 D 正确，故选 ACD.

11．由正切函数的周期$T=\frac{\pi}{\omega}=\frac{\pi}{3}$，解得$\omega=3$，故 A 错误；因为$f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}\tan\left(-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)+6=5$，所以$f(x)$的图象经过点$\left(-\frac{\pi}{6},\ 5\right)$；故 B 正确；令$3x+\frac{\pi}{3}\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得$x\neq\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，即$f(x)$的定义域为$\left\{x\middle|x\neq\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbf{Z}\right\}$，故 C 正确；令$\sqrt{3}\tan\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)+6>9$，则$\tan\left(3x+\frac{\pi}{3}\right)>\sqrt{3}$，所以$\frac{\pi}{3}+k\pi<3x+\frac{\pi}{3}<\frac{\pi}{2}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得$\frac{k\pi}{3}<x<\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}$，$k\in\mathbf{Z}$，即不等式$f(x)>9$的解集为$\left(\frac{k\pi}{3},\ \frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}\right)$，$k\in\mathbf{Z}$，故 D 正确，故选 BCD.

12．如图 2 建立空间直角坐标系，则$A(1,\ 0,\ 0)$，$C(0,\ 1,\ 0)$，$D_1(0,\ 0,\ 1)$，$A_1(1,\ 0,\ 1)$，$B(1,\ 1,\ 0)$，$C_1(0,\ 1,\ 1)$，所以$\overrightarrow{AC}=(-1,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{BD_1}=(-1,\ -1,\ 1)$，$\overrightarrow{A_1B}=(0,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{BC_1}=(-1,\ 0,\ 1)$，所以$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD_1}=0$，所以$AC\perp BD_1$，故 A 正确；因为$P$是线段$BC_1$上一动点，所以$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BC_1}\ (0\leqslant\lambda\leqslant1)$，所以$\overrightarrow{A_1P}=\overrightarrow{A_1B}+\overrightarrow{BP}=$

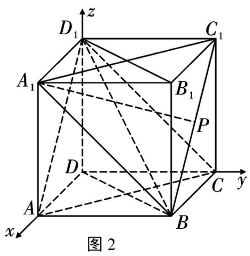

图 2

$(0,\ 1,\ -1)+\lambda(-1,\ 0,\ 1)=(-\lambda,\ 1,\ \lambda-1)$，所以$|\overrightarrow{A_1P}|=\sqrt{\lambda^2+(\lambda-1)^2+1}=\sqrt{2\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}}$，当且仅当$\lambda=\frac{1}{2}$时，$|\overrightarrow{A_1P}|_{\min}=\frac{\sqrt{6}}{2}$，故 B 正确；设平面$ACD_1$的法向量为$\vec{n}=(x,\ y,\ z)$，则$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=0,\end{cases}$ 即$\begin{cases}-x+y=0,\\ -x+z=0,\end{cases}$ 令$x=1$，则$y=z=1$，所以$\vec{n}=(1,\ 1,\ 1)$，因为

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{A_1P}=-\lambda+1+\lambda-1=0$，即$\vec{n}\perp\overrightarrow{A_1P}$，因为$A_1P\not\subset$平面$ACD_1$，所以$A_1P/\!/$平面$ACD_1$，故C错误；设直线$A_1P$与$AD_1$所成的角为$\theta$，因为$AD_1/\!/BC_1$，当$P$在线段$BC_1$的端点处时，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$，$P$在线段$BC_1$的中点时，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$，所以$\theta\in\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}\right]$，故D正确，故选ABD.

第Ⅱ卷（非选择题，共90分）

三、填空题（本大题共4小题，每小题5分，共20分）

题号	13	14	15	16
答案	1	3	$\dfrac{140\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{6}$(或30°)

【解析】

13．因为$f\left(\dfrac{1}{x}+1\right)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{4}$，令$\dfrac{1}{x}+1=\dfrac{3}{2}$，解得$x=2$，所以$f\left(\dfrac{3}{2}\right)=\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=1$.

14．$\because\vec{a}/\!/\vec{b}$，则显然$x\neq0$，$\therefore\dfrac{2}{x}=\dfrac{-1}{2}=\dfrac{y}{-4}$，解得$x=-4$，$y=2$，则$\vec{a}=(2,-1,2)$，$\vec{b}=(-4,2,-4)$，$|\vec{a}+\vec{b}|=|(-2,1,-2)|=\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}=3$.

15．如图3，旋转之后形成的图形为圆台去掉一个半球体，则旋转周所形成的几何体的体积为$\dfrac{1}{3}\times4\times(4\pi+25\pi+\sqrt{4\pi\times25\pi})-\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}\pi\times2^3=\dfrac{140}{3}\pi$.

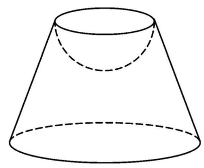

图3

16．由题意$DE\perp BC$，作$AF\perp BC$，如图4所示，令$BC=2$，则$CF=1$，设$AF=x$，则$\tan\angle BAF=\dfrac{3}{x}$，$\tan\angle CAF=\dfrac{1}{x}$，所以

$\tan\angle BAC=\tan(\angle BAF-\angle CAF)=\dfrac{\tan\angle BAF-\tan\angle CAF}{1+\tan\angle BAF\tan\angle CAF}=\dfrac{\dfrac{3}{x}-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{3}{x^2}}=\dfrac{2x}{x^2+3}=\dfrac{2}{x+\dfrac{3}{x}}\leqslant\dfrac{2}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则$\angle BAC\in\left(0,\dfrac{\pi}{6}\right]$，当且仅当$x=\sqrt{3}$时，$\angle A$取得最大值$\dfrac{\pi}{6}$.

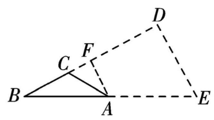

图4

四、解答题（共 70 分．解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤）

17．（本小题满分 10 分）

解：（Ⅰ）$\frac{1}{2}\lg 25+\lg 2+\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_3 2}-\log_2 9\times\log_3 2=\lg 25^{\frac{1}{2}}+\lg 2+(3^{-1})^{\log_3 2}-\log_2 3^2\times\log_3 2$

$=\lg(5\times 2)+3^{-\log_3 2}-2\log_2 3\times\frac{1}{\log_2 3}=1+2^{-1}-2=-\frac{1}{2}$.

……………………………………………（5 分）

（Ⅱ）$\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=2$，$\sin\alpha=2\cos\alpha$，$\alpha$ 在第一或第三象限，

$\because \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$\cos^2\alpha=\frac{1}{5}$，$\sin^2=\frac{4}{5}$，

若 α 在第一象限，则 $\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

若 α 在第三象限，则 $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，$\sin\alpha=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

不论 α 是在第一或第三象限，都有 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2}{5}$，

原式 $2\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=1+\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha=1+\frac{4}{5}-3\times\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$.

……………………………………………（10 分）

18．（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）连接 PB，如图 5，由正方体的结构特点易知

$AB\perp$ 平面 BCC_1B_1，B 为垂足，

所以 $\angle APB$ 即为所求的线面角，

$\because CC_1=4CP$，$\therefore CP=1$，

由勾股定理知 $BP=\sqrt{17}$，$AP=\sqrt{33}$，

$\therefore \sin\angle APB=\frac{4}{\sqrt{33}}=\frac{4\sqrt{33}}{33}$.

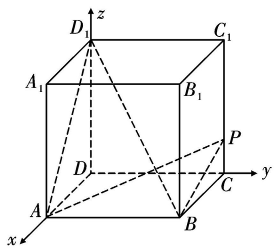

图 5

……………………………………………………………（6 分）

（Ⅱ）以 D 为坐标原点，以 DA，DC，DD_1 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系，如图，

由已知 $D(0,0,0)$，$A(4,0,0)$，$C(0,4,0)$，$D_1(0,0,4)$，$B(4,4,0)$，

所以 $\overrightarrow{AB}=(0,4,0)$，$\overrightarrow{AD_1}=(-4,0,4)$，$\overrightarrow{AP}=(-4,4,1)$，

设平面 ABD_1 的法向量为 $\vec{n}=(x, y, z)$，故有 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD_1}=-4x+4z=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=4y=0,\end{cases}$

令 $x=1$，则 $z=1$，故 $\vec{n}=(1, 0, 1)$，

故点 P 到平面 ABD_1 的距离 $d=\dfrac{|\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{|-4+1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.

……………………………………………（12 分）

19.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）由乙种酸奶日销售量的频率分布直方图可得：

$10a=1-(0.010+0.020+0.030+0.025)\times10=0.15$，解得：$a=0.015$，

根据表中数据可作出甲种酸奶日销售量的频率分布直方图如图 6 所示：

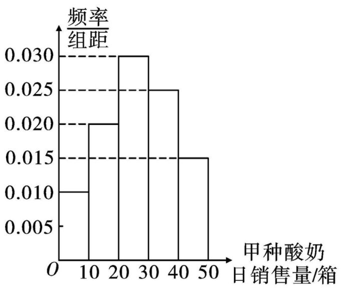

图 6

……………………………………………（4 分）

（Ⅱ）记甲、乙两种酸奶日销售量的平均数分别为 $\overline{x_1}$，$\overline{x_2}$，

则 $\overline{x_1}=5\times0.1+15\times0.2+25\times0.3+35\times0.25+45\times0.15=26.5$，

$\overline{x_2}=5\times0.2+15\times0.1+25\times0.3+35\times0.15+45\times0.25=26.5$，

$\therefore s_1^2=(5-26.5)^2\times0.1+(15-26.5)^2\times0.2+(25-26.5)^2\times0.3+(35-26.5)^2\times0.25+(45-26.5)^2$

$\times0.15=142.75$，

$s_2^2=(5-26.5)^2\times0.2+(15-26.5)^2\times0.1+(25-26.5)^2\times0.3+(35-26.5)^2\times0.15+(45-26.5)^2$

$\times0.25=202.75$，

$\therefore s_1^2<s_2^2$. ……………………………………………（10 分）

（Ⅲ）由（Ⅱ）得乙种酸奶的平均日销售量为 26.5 箱，

$\therefore$ 乙种酸奶未来一个月的销售总量约为 $26.5\times30=795$（箱）.

……………………………………………（12 分）

20.（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）由函数 $f(x)$ 最大值为 3，最小值 -3，所以 $A=3$，

在同一周期内，当 $x=\dfrac{\pi}{12}$ 时，$f(x)$ 取得最大值，当 $x=\dfrac{7\pi}{12}$ 时，$f(x)$ 取得最小值，

所以 $\dfrac{T}{2}=\dfrac{7\pi}{12}-\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{6\pi}{12}=\dfrac{\pi}{2}$，所以 $T=\pi\Rightarrow\omega=\dfrac{2\pi}{T}=2$，

又 $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=3$，所以 $f\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=3\sin\left(2\times\dfrac{\pi}{12}+\varphi\right)=3$，

所以 $2\times\dfrac{\pi}{12}+\varphi=\dfrac{\pi}{6}+\varphi=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\varphi=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，

又 $|\varphi|<\dfrac{\pi}{2}$，所以当 $k=0$ 时，$\varphi=\dfrac{\pi}{3}$，

所以函数 $f(x)=3\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)$，

因为 $g(x)=f(-x)$，所以 $g(x)=3\sin\left(-2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=-3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)$，

令 $-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\leqslant 2x-\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，得 $-\dfrac{\pi}{12}+k\pi\leqslant x\leqslant\dfrac{5\pi}{12}+k\pi$，$k\in\mathbf{Z}$，

所以 $g(x)$ 的单调递减区间为 $\left[-\dfrac{\pi}{12}+k\pi,\ \dfrac{5\pi}{12}+k\pi\right](k\in\mathbf{Z})$．……………………………（6 分）

（Ⅱ）令 $h(x)=6f(x)+1-m=0$，即 $f(x)=\dfrac{m-1}{6}$，

所以当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{6}\right]$ 时，函数 $h(x)=6f(x)+1-m$ 有两个零点，

问题转化为 $y=f(x)$ 与 $y=\dfrac{m-1}{6}$ 有两个不同的交点，

因为 $-\dfrac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}$，所以 $-\dfrac{\pi}{3}\leqslant 2x+\dfrac{\pi}{3}\leqslant\dfrac{2\pi}{3}$，

令 $t=2x+\dfrac{\pi}{3}$，$t\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2\pi}{3}\right]$，则 $y=\sin\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin t$，

如图 7 所示：

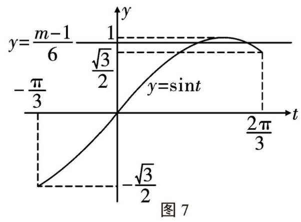

图 7

由图象可得：$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\dfrac{m-1}{18}<1$，解得：$9\sqrt{3}+1\leqslant m<19$，

所以当 $x\in\left[-\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\pi}{6}\right]$ 时，函数 $h(x)=6f(x)+1-m$ 有两个零点，

则实数 m 的取值范围为 $[9\sqrt{3}+1,\ 19)$．

…………………………………………………（12 分）

21.（本小题满分 12 分）

（Ⅰ）解：因为 $AB/\!/DC$，所以 $\angle BAE$ 就是异面直线 AE 与 DC 所成的角，

连接 BE，如图 8，

在 $\triangle ABE$ 中，$AB=2$，$AE=\sqrt{7}=BE$，于是 $\cos\angle BAE=\dfrac{7+4-7}{2\times 2\times\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$，

所以异面直线 AE 与 DC 所成角的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{7}$.

……………………………………………（4 分）

（Ⅱ）证明：如图，取 EF 的中点 M，由于 $ED\perp$ 平面 $ABCD$，$ED/\!/FB$，

∴$ED\perp AD$，$ED\perp DC$，$FB\perp BC$，$FB\perp AB$，

又 $ABCD$ 是菱形，$BDEF$ 是矩形，

所以，$\triangle ADE$，$\triangle EDC$，$\triangle ABF$，$\triangle BCF$ 是全等三角形，$AE=AF$，$CE=CF$，

所以 $AM\perp EF$，$CM\perp EF$，$\angle AMC$ 就是二面角 $A-EF-C$ 的平面角，

经计算 $AM=CM=\sqrt{6}$，$AC=2\sqrt{3}$，

所以 $AM^2+CM^2=AC^2$，即 $AM\perp MC$，

所以平面 $AEF\perp$ 平面 CEF.

……………………………………………（8 分）

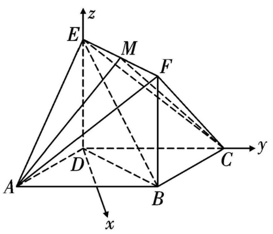

图 8

（Ⅲ）解：建立如图的直角坐标系，由 $AD=2$，则

$M\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \sqrt{3}\right)$，$C(0,\ 2,\ 0)$，$A(\sqrt{3},\ -1,\ 0)$，

$E(0,\ 0,\ \sqrt{3})$，$F(\sqrt{3},\ 1,\ \sqrt{3})$.

平面 CEF 的法向量 $\overrightarrow{n_1}=\overrightarrow{AM}=\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3}{2},\ \sqrt{3}\right)$.

设 $N(\sqrt{3},\ \lambda,\ 0)$，则 $\overrightarrow{EN}=(\sqrt{3},\ \lambda,\ -\sqrt{3})$，$\overrightarrow{EF}=(\sqrt{3},\ 1,\ 0)$，

设平面 NEF 的法向量 $\overrightarrow{n_2}=(x,\ y,\ z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{EF}\bullet\overrightarrow{n_2}=0,\\ \overrightarrow{EN}\bullet\overrightarrow{n_2}=0,\end{cases}$

得 $\begin{cases}\sqrt{3}x+y=0,\\ \sqrt{3}x+\lambda y-\sqrt{3}z=0,\end{cases}$ 令 $x=1$，则 $y=-\sqrt{3}$，$z=1-\lambda$，得 $\overrightarrow{n_2}=(1,\ -\sqrt{3},\ 1-\lambda)$.

因为二面角 $N-EF-C$ 的大小为 $60°$，

所以 $\cos 60° = \dfrac{\overrightarrow{n_2} \cdot \overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{n_2}| \cdot |\overrightarrow{AM}|} = \dfrac{\left|-\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3}(1-\lambda)\right|}{\sqrt{\dfrac{3}{4}+\dfrac{9}{4}+3}\sqrt{1+3+(1-\lambda)^2}}$，整理得 $\lambda^2 + 6\lambda - 3 = 0$，

解得 $\lambda = 2\sqrt{3} - 3$，所以 $|AN| = 2\sqrt{3} - 2$．……………………………………………（12 分）

22．（本小题满分 12 分）

解：（Ⅰ）因为 $b = 2a - 2c\cos B$，由正弦定理可得

$\sin B = 2\sin A - 2\sin C\cos B = 2\sin(B+C) - 2\sin C\cos B = 2\sin B\cos C$，

因为 B，$C \in (0，\pi)$，则 $\sin B > 0$，$\cos C = \dfrac{1}{2}$，

故 $C = \dfrac{\pi}{3}$．……………………………………………（4 分）

（Ⅱ）$S_{\triangle ABC} = \dfrac{1}{2}ab\sin C = \dfrac{\sqrt{3}}{4}ab = 2\sqrt{3}$，可得 $ab = 8$，则 $\sin A\sin B = \dfrac{ab}{(2\sqrt{3})^2} = \dfrac{2}{3}$，

$\cos 2A = \cos[(A+B)+(A-B)] = \cos(A+B)\cos(A-B) - \sin(A+B)\sin(A-B)$，

$\cos 2B = \cos[(A+B)-(A-B)] = \cos(A+B)\cos(A-B) + \sin(A+B)\sin(A-B)$，

$\cos(A+B) = \cos(\pi - C) = -\cos C = -\dfrac{1}{2}$，

因为 $\cos(A-B) - \cos(A+B) = (\cos A\cos B + \sin A\sin B) - (\cos A\cos B - \sin A\sin B)$

$= 2\sin A\sin B = \dfrac{4}{3}$，

所以，$\cos(A-B) = \dfrac{4}{3} + \cos(A+B) = \dfrac{4}{3} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{5}{6}$，

因此，$\cos 2A + \cos 2B = 2\cos(A+B)\cos(A-B) = 2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)\times\dfrac{5}{6} = -\dfrac{5}{6}$．

……………………………………………（8 分）

（Ⅲ）取 AC 的中点 D，则 $OD \perp AC$，如图 9 所示，

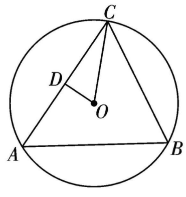

图 9

$\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CA} = (\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DO}) \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DO} \cdot \overrightarrow{CA} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}^2$，

同理可得 $\overrightarrow{CO} \cdot \overrightarrow{CB} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}^2$，

设$\triangle ABC$的外接圆半径为r，

因为$\frac{\cos B}{\sin A}\overrightarrow{CB}+\frac{\cos A}{\sin B}\overrightarrow{CA}=2m\overrightarrow{CO}$，

故$\frac{\cos B}{\sin A}\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CO}+\frac{\cos A}{\sin B}\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CO}=2m\overrightarrow{CO}^2$，

即$\frac{\cos B}{2\sin A}\overrightarrow{CB}^2+\frac{\cos A}{2\sin B}\overrightarrow{CA}^2=2m\overrightarrow{CO}^2$，

即$\frac{a^2\cos B}{2\sin A}+\frac{b^2\cos A}{2\sin B}=2m\overrightarrow{CO}^2$，

则有$\frac{4r^2\sin^2 A\cos B}{2\sin A}+\frac{4r^2\sin^2 B\cos A}{2\sin B}=2mr^2$，

整理可得$m=\sin A\cos B+\cos A\sin B=\sin(A+B)=\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

……………………………………………………（12分）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。