高三年级数学（理科）

参考答案

一、选择题 $CABDC\quad ABCCB\quad CD$

二、填空题 13．-147　　14．$\dfrac{200}{3}$　　15．$\dfrac{2}{3}$　　16．$(1,2+e)$

三、解答题

17．【解析】

证明：

① 当$n=1$时，左边$=1+\alpha$，右边$=1+\alpha$.

所以，当$n=1$时，命题成立. ……………………………………………………1 分

②假设当$n=k(k\geq 1)$时，命题成立，即$(1+\alpha)^k\geq 1+k\alpha$.………………………2 分

那么，当$n=k+1$时，因为$\alpha>-1$，所以$1+\alpha>0$.……………………………3 分

根据假设知，$(1+\alpha)^{k+1}=(1+\alpha)^k(1+\alpha)$ ……………………………………………4 分

$\geq(1+k\alpha)(1+\alpha)$

$=1+(k+1)\alpha+k\alpha^2$ ……………………………………………6 分

由于$k\alpha^2\geq 0$，所以$1+(k+1)\alpha+k\alpha^2\geq 1+(k+1)\alpha$.

从而$(1+\alpha)^{k+1}\geq 1+(k+1)\alpha$.…………………………………………………………8 分

这表明，当$n=k+1$时，命题成立. ……………………………………………………9 分

根据①②知，该命题成立. ……………………………………………………………10 分

18．【解析】

(1)由题 $f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{x}+1, x\leq 1\\ (x+1)^5, x>1\end{cases}$,

所以当$0<x<1$时, $f(x)=\sqrt[3]{x}+1>1$, ……………………………………………2 分

故$f\left(f(x)\right)=f(\sqrt[3]{x}+1)=(\sqrt[3]{x}+2)^5$, ……………………………………………4 分

而$(\sqrt[3]{x}+2)^5$的展开式共有 6 项, ……………………………………………………5 分

故二项式系数的最大值为$C_5^2=C_5^3=10$.……………………………………………6 分

（2）当$x>1$时，$f^2(x)=(x+1)^{10}$，……………………………………………………7 分

即 $\left(x+1\right)^{10}=\left(2-(1-x)\right)^{10}=a_0+a_1(1-x)+a_2(1-x)^2+\cdots+a_{10}(1-x)^{10}$，……9 分

由 $T_{r+1}=C_n^r 2^{n-r}(-(1-x))^r$ ……………………………………………………………10 分

可知，$a_7=C_{10}^7 2^3(-1)^7=-960$.……………………………………………………12 分

19.【解析】

（1）由表格数据可得 2×2 列联表如下：

	非移动支付活跃用户	移动支付活跃用户	总计
男	25	20	45
女	15	40	55
总计	40	60	100

……………………………………………………………………………………………2 分

将列联表中的数据代入公式计算，得

$\chi^2=\dfrac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$

$=\dfrac{100\times(25\times40-15\times20)^2}{40\times60\times55\times45}$……………………………………………………3 分

$=\dfrac{2\,450}{297}\approx8.249>6.635$. ………………………………………………………5 分

所以有 99%的把握认为是否为“移动支付活跃用户”与性别有关．………………6 分

（2）视频率为概率，在我市“移动支付达人”中，随机抽取 1 名用户，该用户为男“移动支付达人”的概率为$\dfrac{1}{3}$，女“移动支付达人”的概率为$\dfrac{2}{3}$.……………………………………8 分

于是，抽取的 4 名用户中，既有男“移动支付达人”，又有女“移动支付达人”的概率为：

$P(A)=1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^4-\left(\dfrac{2}{3}\right)^4=\dfrac{64}{81}$.…………………………………………………………12 分

20.【解析】

(1) 证明：由题知证 $\ln x\geqslant-\dfrac{1}{x}+1$ 成立即可，…………………………………1 分

令 $g(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}-1(x>0)$，

则 $g'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{x-1}{x^2}$.…………………………………………………2 分

当 $0<x<1$ 时，$g'(x)<0$；当 $x>1$ 时，$g'(x)>0$，

故 $g(x)$在$(0,1)$上单调递减，$g(x)$在$(1，+\infty)$上单调递增，……………………3 分

所以 $g(x)\geqslant g(1)=0$，即 $\ln x\geqslant -\dfrac{1}{x}+1$. ……………………………………………………4 分

(当且仅当 $x=1$ 时取得等号) ……………………………………………………………5 分

(2)由(1)知：$h(x)=f(x)+(x^2-1)\ln x$

$=x^2\ln x+a(1-x^2)$

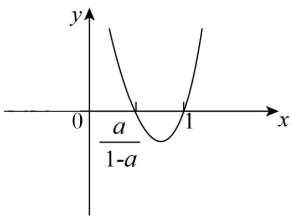
$\geq x^2\left(-\dfrac{1}{x}+1\right)+a(1-x^2)$ (※) ……………………………………………………7 分

$=(x-1)[(1-a)x-a]$

$=(1-a)(x-1)(x-\dfrac{a}{1-a})$ ……………………………………………………………8 分

由于 $x\in\left(0，\dfrac{a}{1-a}\right)$，所以 $0<a<1$，

即 $(1-a)>0$，



数形结合只需 $0<\dfrac{a}{1-a}<1$ 成立即可.

解得 $0<a<\dfrac{1}{2}$. ………………………………………………………………………10 分

又当 $\dfrac{a}{1-a}=1$，即 $a=\dfrac{1}{2}$ 时，(※)式取“＝”，

结合 $h(1)=0$，可知 $a=\dfrac{1}{2}$ 符合题意. ……………………………………………11 分

综上所述：$0<a\leq\dfrac{1}{2}$. ……………………………………………………………12 分

21.【解析】

(1)令 $f(x)=\ln x-mx+1=0$，得 $m=\dfrac{1+\ln x}{x}$，

即函数 $g(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$与直线 $y=m$ 在$(0，+\infty)$上有两个不同交点，……………1 分

因为 $g'(x)=\dfrac{-\ln x}{x^2}(x>0)$，…………………………………………………………2 分

当 $x\in(0,1)$时，$g'(x)>0$；

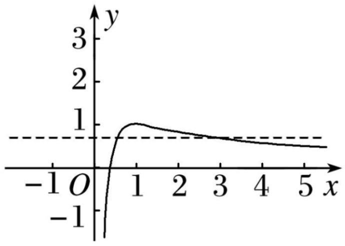
当 $x\in(1,+\infty)$时，$g'(x)<0$，

故 $g(x)$在$(0,1)$上单调递增，在$(1,+\infty)$上单调递减，

所以 $g(x)_{\max}=g(1)=1$.又 $g\left(\frac{1}{e}\right)=0$，

故当 $x\in\left(0,\frac{1}{e}\right)$时，$g(x)<0$；

当 $x\in\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$时，$g(x)>0$. ……………………………………4 分



画出图象，如图所示，……………………………………5 分

可得 $m\in(0,1)$. ……………………………………6 分

(2)由题，当 $m=0$ 时，$f(x)=lnx+1$，

由 $f'(x)=\frac{1}{x}$，知 $f'(x_0)=\frac{1}{x_0}$，……………………………………7 分

故曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线为：$y-f(x_0)=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$，

即：$y-\ln x_0-1=\frac{1}{x_0}(x-x_0)$，

所以 $y=\frac{1}{x_0}x+\ln x_0$. ……………………………………8 分

又设该切线与 $y=e^x$ 相切于点 (x_1,y_1)，则由 $y'=e^x$，易知 $y-e^{x_1}=e^{x_1}(x-x_1)$，

即：$y=e^{x_1}x+e^{x_1}(1-x_1)$. ……………………………………9 分

于是：$\begin{cases} e^{x_1}=\frac{1}{x_0} \\ e^{x_1}(1-x_1)=\ln x_0 \end{cases}$ ……………………………………10 分

从而有 $x_1=-\ln x_0$，……………………………………11 分

整理可得：$(x_0-1)\ln x_0=1$.又 $x_0=1$ 显然不满足，

因此$\ln x_0=\dfrac{1}{x_0-1}$成立.……………………………………………………………12 分

22.【解析】

(1) A 系统需要维修的概率为$C_3^1\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{2}$，……………………………………1 分

B 系统需要维修的概率为$C_5^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+C_5^1\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^4+\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\dfrac{1}{2}$，……………………3 分

设 X 为该电子产品需要维修的系统个数，则 $X\sim B\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$，$\xi=200X$.

$P(\xi=200k)=P(X=k)=C_2^k\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^k\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2-k}(k=0,1,2)$，………………………………4 分

∴ ξ 的分布列为:

ξ	0	200	400
P	$\dfrac{1}{4}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{4}$

∴ $E\xi=200\times2\times\dfrac{1}{2}=200$.…………………………………………………………………6 分

(2) A 系统 3 个元件至少有 2 个正常工作的概率为:

$P_A=C_3^2p^2(1-p)+p^3=-2p^3+3p^2$，………………………………………………………7 分

B 系统 5 个元件至少有 3 个正常工作的概率为:

$P_B=C_5^3p^3(1-p)^2+C_5^4p^4(1-p)+p^5=6p^5-15p^4+10p^3$，……………………………9 分

则 $f(p)=P_B-P_A=6p^5-15p^4+12p^3-3p^2=3p^2(p-1)^2(2p-1)$.

∵ $0<p<1$.令 $f(p)>0$，解得$\dfrac{1}{2}<p<1$.…………………………………………………10 分

所以:

当$\dfrac{1}{2}<p<1$时，B 系统比 A 系统正常工作的概率大，当该产品出现故障时，优先检测 A 系统;

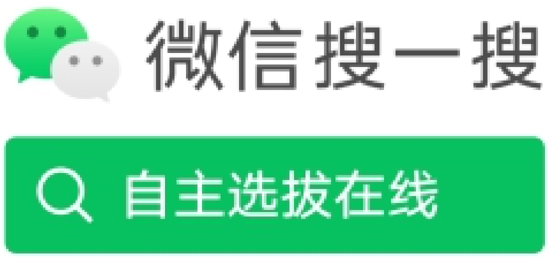
当$0<p<\dfrac{1}{2}$时，A 系统比 B 系统正常工作的概率大，当该产品出现故障时，优先检测 B 系统;

当 $p=\dfrac{1}{2}$时，A 系统与 B 系统正常工作的概率相等，当该产品出现故障时，A，B 系统检测不分次序.………………………………………………………………………………12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》