2022 学年第一学期期末杭州周边四校联考
高二年级数学学科参考答案

一、选择题：

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
D	A	C	B	B	C	D	A	BC	ABD	BCD	AD

二、填空题：

13．7　　14．$\frac{3\sqrt{2}}{8}$　　15．12　　16．4

三、解答题：（本大题共 5 小题，共 74 分．）

17．解：

（1）由题意可得$2a\cos C + c = 2b$，由正弦定理，得$2\sin A\cos C + \sin C = 2\sin B$．.....2 分

又$\sin B = \sin(A + C) = \sin A\cos C + \cos A\sin C$，

$2\sin A\cos C + \sin C = 2(\sin A\cos C + \cos A\sin C)$,则$\sin C = 2\cos A\sin C$．

$\because \sin C \neq 0$，$\therefore \cos A = \frac{1}{2}$． ....4 分

又$0 < A < \pi$，$\therefore A = \frac{\pi}{3}$． ....5 分

（2）$\sin B + \sin C = \sin B + \sin(\frac{2}{3}\pi - B) = \sqrt{3}\sin(B + \frac{\pi}{6})$.......7 分

因△ABC为锐角三角形，$\therefore 0 < \frac{2\pi}{3} - B < \frac{\pi}{2}$，且$0 < B < \frac{\pi}{2}$，$\therefore \frac{\pi}{6} < B < \frac{\pi}{2}$.......8 分

$\therefore \sqrt{3}\sin(B + \frac{\pi}{6}) \in (\frac{3}{2}, \sqrt{3}]$,即$\sin B + \sin C$的取值范围是$(\frac{3}{2}, \sqrt{3}]$.......10 分

(有一边范围正确，扣 2 分)

18．解：(1)：圆C的圆心为坐标原点O，半径为$r = 2$，

设圆心O到直线l的距离为d，则$d = \sqrt{r^2 - \left(\frac{|AB|}{2}\right)^2} = 1$........2 分

①当直线l的斜率不存在时，直线l的方程为$x = 1$，合乎题意；......3 分

②当直线l的斜率存在时，可设直线l的方程为$y - 2 = k(x - 1)$，即$kx - y - k + 2 = 0$，

由题意可得$d = \frac{|2-k|}{\sqrt{k^2+1}} = 1$，解得$k = \frac{3}{4}$，此时直线$l$的方程为$3x - 4y + 5 = 0$.........5 分

综上所述，直线l的方程为$x = 1$或$3x - 4y + 5 = 0$.......6 分

（2）法一、$x + y + 2 = 2\cos\theta + 2\sin\theta + 2 = 2\sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + 2 \in [2 - 2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} + 2]$

所以$x+y+2$的最大值是$2\sqrt{2}+2$，最小值$2-2\sqrt{2}$.

法二、$(x+y)^2\le 2(x^2+y^2)=8,\therefore -2\sqrt{2}\le x+y\le 2\sqrt{2}$,当且仅当$x=y=\pm\sqrt{2}$取等.

所以$x+y+2$的最大值是$2\sqrt{2}+2$，最小值$2-2\sqrt{2}$.

法三、设$x+y+2=t$,联立$x^2+y^2=4$,$\Delta\ge 0$得

所以$x+y+2$的最大值是$2\sqrt{2}+2$，最小值$2-2\sqrt{2}$.（最大最小值各3分）

19．解：

（1）设这m人的平均年龄为$\bar{x}$，则

$\bar{x}=22.5\times0.05+27.5\times0.35+32.5\times0.3+37.5\times0.2+42.5\times0.1=32.25$（岁）.……2分

设第80百分位数为a，

方法一：由$5\times0.02+(40-a)\times0.04=0.2$，解得$a=37.5$.

方法二：由$0.05+0.35+0.3+(a-35)\times0.04=0.8$，解得$a=37.5$.……4分

（2）（i）由题意得，第四组应抽取4人，记为A，B，C，甲，第五组抽取2人，记为D，乙，对应的样本空间为：

$\Omega=\{(A,B),(A,C),(A,甲),(A,乙),(A,D),(B,C),(B,甲),(B,乙),(B,D),(C,甲),(C,乙),(C,D),(甲,乙),(甲,D),(乙,D)\}$，共15个样本点.……5分

设事件$M=$“甲、乙两人至少一人被选上”，则

$M=\{(A,甲),(A,乙),(B,甲),(B,乙),(C,甲),(C,乙),(甲,乙),(甲,D),(乙,D)\}$，共有9个样本点.……6分

所以，$P(M)=\dfrac{n(M)}{n(\Omega)}=\dfrac{3}{5}$.……8分

（ii）设第四组、第五组的宣传使者的年龄的平均数分别为$\bar{x}_4$，$\bar{x}_5$，方差分别为s_4^2，s_5^2，

则$\bar{x}_4=37$，$\bar{x}_5=43$，$s_4^2=\dfrac{5}{2}$，$s_5^2=1$，……10分

设第四组和第五组所有宣传使者的年龄平均数为$\bar{z}$，方差为s^2.

则$\bar{z}=\dfrac{4\bar{x}_4+2\bar{x}_5}{6}=39$，$s^2=\dfrac{1}{6}\left\{4\times\left[s_4^2+\left(\bar{x}_4-\bar{z}\right)^2\right]+2\times\left[s_5^2+\left(\bar{x}_5-\bar{z}\right)^2\right]\right\}=10$，

因此，第四组和第五组所有宣传使者的年龄方差为10，

据此，可估计这m人中年龄在35~45岁的所有人的年龄方差约为10.……12分

20．解（1）取AC的中点O，连接OP,OD，

因为$\triangle PAC$是正三角形，所以$PO\perp AC$，……2分

因为D是AB的中点，所以$DO\parallel BC$，

因为$AC\perp BC$所以$DO\perp AC$，……4分

又$PO\cap DO=O,PO,DO\subset$面POD，所以$AC\perp$面POD，

又因为$PD\subset$面POD，所以$AC\perp PD$.……5分

（2）以OA,OD为x轴、y轴，过O作z轴⊥底面ABC，建立如图空间直角坐标系，

则$O(0,0,0),A(1,0,0),D(0,1,0),C(-1,0,0),B(-1,2,0)$，……6分

易得$\angle POD=120°$，又$PO=\sqrt{3}$，则$P\left(0,-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，……7分

由 $DO//BC$ 易得直线 BC 的一个方向向量为 $\vec{m}=(0,1,0)$,

设平面 PAB 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$, $\overrightarrow{AB}=(-2,2,0),\overrightarrow{AP}=\left(-1,-\frac{3}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

则 $\begin{cases}-2x+2y+0=0\\-x-\dfrac{3}{2}y+\dfrac{\sqrt{3}}{2}z=0\end{cases}$，令 $x=1$，则平面 PAB 的一个法向量为 $\vec{n}=\left(1,1,\dfrac{5}{\sqrt{3}}\right)$，......9 分

记直线 BC 与平面 PAB 所成角为 α，那么 $\sin\alpha=|\cos<\vec{m},\vec{n}>|=\frac{|\vec{m}\cdot\vec{n}|}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{1}{1\times\sqrt{\frac{31}{3}}}=\frac{\sqrt{93}}{31}$......12 分

（注：公式完整，但计算错误给 10 分，否则给 9 分）

21．解：

（1）依题意可知，当 ΔAEF 是等腰直角三角形时：

若 $\angle EAF=90^\circ$ 时，根据抛物线定义，显然不成立；

若 $\angle AEF=90^\circ$ 时，显然也不成立.

故 $\angle AFE=90^\circ$ ....1 分

$\because$ 抛物线 C 方程为 $y^2=2px(p>0)$，

$\therefore$ 焦点 $F(\frac{p}{2},0)$， $E(-\frac{p}{2},0)$， $|EF|=|AF|=p$ ....2 分

$\therefore$ ΔAEF 的面积 $S_{\Delta AEF}=\dfrac{1}{2}p^2=2$，解得 $p=2$，

$\therefore$ 抛物线 C 的方程为 $y^2=4x$ ....4 分

（2）证明：由（1）知 $F(1,0)$，

设直线 AB 的方程： $x=ty+1$ 代入 $y^2=4x$ 得: $y^2-4ty-4=0$，

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，所以 $y_1+y_2=4t, y_1y_2=-4$ ....6 分

设 $M(-1,y_M)$，则： $k_0=\dfrac{-y_M}{2}$， $k_1=\dfrac{y_1-y_M}{x_1+1}$， $k_2=\dfrac{y_2-y_M}{x_2+1}$ ....7 分

$\because\begin{cases}x_1=ty_1+1\\x_2=ty_2+1\end{cases}$， $\therefore\begin{cases}x_1+1=ty_1+2\\x_2+1=ty_2+2\end{cases}$ ....8 分

$$\therefore k_1+k_2=\frac{y_1-y_M}{x_1+1}+\frac{y_2-y_M}{x_2+1}=\frac{y_1-y_M}{ty_1+2}+\frac{y_2-y_M}{ty_2+2}$$

$$=\frac{(y_1-y_M)(ty_2+2)+(y_2-y_M)(ty_1+2)}{(ty_1+2)(ty_2+2)}$$

$$=\frac{2ty_1y_2+2(y_1+y_2)-y_M[t(y_1+y_2)+4]}{t^2y_1y_2+2t(y_1+y_2)+4}$$

$$=\frac{-8t+8t-y_M(4t^2+4)}{-4t^2+8t^2+4}=\frac{-y_M(4t^2+4)}{4t^2+4}=-y_M$$ ....11 分

$\therefore k_1+k_2=2k_0$. 所以$\lambda=2$. ....12 分

22.

解:(1)$F(x)=\begin{cases}x^2+x+2b, x\in[0,2]\\ x^2-x+2b, x\in[-1,0]\end{cases}$,

根据单调性，易得$F_{\max}(x)=\max\{F(2),F(-1)\}$.........1分

$=6+2b$.........3分

(2).$g(x)=(x^2+x)(x^2+2ax+a^2+b)$,

由题意$g(x)$关于直线$x=1$对称，即$g(x+1)$为偶函数.

$g(x+1)=[(x+1)^2+(x+1)][(x+1)^2+2a(x+1)+a^2+b]$

$=[(x^2+2)+3x)][(x^2+(a+1)^2+b)+(2+2a)x]$

$\therefore\begin{cases}2+2a=-3\\(a+1)^2+b=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\frac{5}{2}\\b=-\frac{1}{4}\end{cases}$........6分（其他方法答案对即可）

$\therefore g(x+1)=[(x^2+2)+3x)]((x^2+2)-3x)=x^4-5x^2+4\geq-\frac{9}{4}$

而$g(x+1)$与$g(x)$的值域相同，所以$g(x)$的值域是$[-\frac{9}{4},+\infty)$ 8分

(3). $f_2(f_2(x)) = x \Rightarrow f_2(f_2(x)) - f_2(x) = x - f_2(x)$,

即$f_2^{\ 2}(x) - 2f_2(x) + b + 1 - f_2(x) = x - f_2(x)$,

即$f_2^{\ 2}(x) - 2f_2(x) + b + 1 - (x^2 - 2x + b + 1) = x - f_2(x)$

即$[f_2(x) - x][f_2(x) + x - 1] = 0$........10分

$\therefore f_2(x) - x = 0$与$f_2(x) + x - 1=0$有相同的根，或$f_2(x) + x - 1=0$无根

$\therefore f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$或$\Delta < 0$,

$\therefore b$的范围是$[\frac{1}{4}, +\infty)$.......12分

.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线