# 百校联盟 2020 届 TOP20 九月联考

# 文科数学　　参考答案

本试卷防伪处为：

某艺术团要以四大美女为主题

使得四边形 $STDB$ 为菱形

1. B 【解析】依题意，$A=\{x\mid x^2-4x-12<0\}=\{x\mid -2<x<6\}$，$B=\{y\mid y=\sqrt{x}+2\}=\{y\mid y\geqslant 2\}$，故 $A\cap B=[2,6)$.

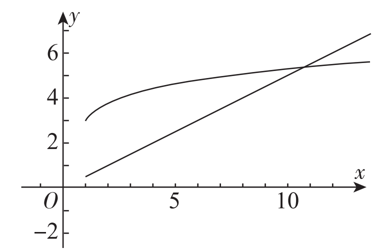
2. D 【解析】$(2-5i)(3+8i)=6+16i-15i+40=46+i$，故所求虚部为 1.

3. A 【解析】依题意，$a=\log_5 26>2$，$1<b=\sqrt[5]{9}=9^{\frac{1}{5}}<2$，$0<c=0.6^{0.9}<0.6^0=1$，故 $a>b>c$.

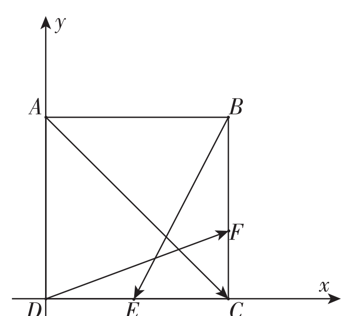
4. C 【解析】依题意，所有的情况为（甲—西施，丙—昭君，丁—貂蝉），（甲—西施，丙—貂蝉，丁—昭君），（甲—昭君，丙—西施，丁—貂蝉），（甲—昭君，丙—貂蝉，丁—西施），（甲—貂蝉，丙—昭君，丁—西施），（甲—貂蝉，丙—西施，丁—昭君），其中满足条件的就 1 种，所求事件的概率为 $\frac{1}{6}$.

5. A 【解析】依题意，$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，定义域关于原点对称，且 $f(-x)=\frac{e^{|-x|}}{(-x)^3}+\sin(-x)=-(\frac{e^{|x|}}{x^3}+\sin x)=-f(x)$，故函数 $f(x)$ 为奇函数，图象关于原点对称，排除 C；而当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to+\infty$，排除 D；$f(\frac{3\pi}{4})=\frac{e^{\frac{3\pi}{4}}}{(\frac{3\pi}{4})^3}+\frac{\sqrt{2}}{2}>0$，排除 B.

6. C 【解析】当 $x\leqslant 1$ 时，令 $f(x)=0$，得 $x^2+\frac{3}{2}x=0$，解得 $x=-\frac{3}{2}$ 或 $x=0$；当 $x>1$ 时，令 $f(x)=0$，得 $\ln x-\frac{1}{2}x+3=0$，故 $\ln x+3=\frac{1}{2}x$，在同一直角坐标系中分别作出 $y=\ln x+3$，$y=\frac{1}{2}x$ 的图象如图所示，观察可知，有 1 个交点，即 $f(x)=0$ 在 $(1,+\infty)$ 上有 1 个解；综上所述，函数 $f(x)$ 的零点个数为 3.

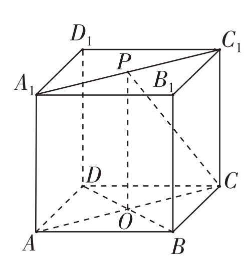



7. C 【解析】以 $D$ 为原点建立如图所示的平面直角坐标系；不妨设 $AB=6$，则 $A(0,6)$，$C(6,0)$，故 $\overrightarrow{AC}=(6,-6)$，$B(6,6)$，$E(3,0)$，$F(6,2)$，故 $\overrightarrow{BE}=(-3,-6)$，$\overrightarrow{DF}=(6,2)$；设 $\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{BE}+y\overrightarrow{DF}$，则 $\begin{cases}6=-3x+6y,\\-6=-6x+2y,\end{cases}$ 解得 $x=\frac{8}{5}$，$y=\frac{9}{5}$，故 $\overrightarrow{AC}=\frac{8}{5}\overrightarrow{BE}+\frac{9}{5}\overrightarrow{DF}$.




8. A 【解析】该程序必须输出的是方程组 $\begin{cases}5x+45=y\\y=3+7x\end{cases}$ 的解，则 $x=21$，观察可知，故选 A.

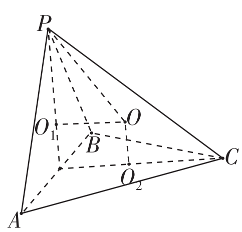
9. A 【解析】易知 $AB=2\sqrt{2}$；连接 $C_1P$，在直角 $\triangle CC_1P$ 中，可计算 $C_1P=\sqrt{CP^2-CC_1^2}=2$；又 $A_1P=2$，$A_1C_1=4$，所以点 $P$ 是 $A_1C_1$ 的中点；连接 $AC$ 与 $BD$ 交于点 $O$，易证 $AC\perp$ 平面 $BDD_1B_1$，直线 $CP$ 在平面 $BDD_1B_1$ 内的射影是 $OP$，所以 $\angle CPO$ 就是直线 $CP$ 与平面 $BDD_1B_1$ 所成的角，在直角 $\triangle CPO$ 中，$\tan\angle CPO=\frac{CO}{PO}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.



10. B 【解析】设 $M(x_1, y_1)$，$N(x_2, y_2)$，则 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{8}+\frac{y_1^2}{2}=1,\\ \frac{x_2^2}{8}+\frac{y_2^2}{2}=1,\end{cases}$ 两式相减可得 $\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{8}+\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{2}=0$，则 $k_{OA}\cdot k_{MN}=-\frac{1}{4}$；因为 $|OA|=|AF_2|$，故 $k_{OA}=-k_{MN}$，解得 $k_{MN}=\pm\frac{1}{2}$，故直线 $l$ 的斜率为 $\pm\frac{1}{2}$.

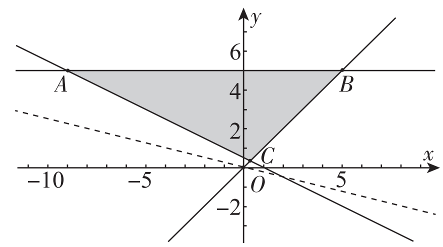
11. B 【解析】依题意，$f(-x)=|\sin\frac{(-x)}{2}|+|\cos\frac{(-x)}{2}|=|\sin\frac{x}{2}|+|\cos\frac{x}{2}|=f(x)$，故函数 $f(x)$ 的图象关于 $y$ 轴对称，故①错误；因为 $f(x+\pi)=|\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2})|+|\cos(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{2})|=|\cos\frac{x}{2}|+|\sin\frac{x}{2}|=f(x)$，故 $x=\pi$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期，且当 $x\in[0,\pi)$ 时，$f(x)=\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}=\sqrt{2}\sin(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4})\in[1,\sqrt{2}]$，故②正确，③错误.

12. C 【解析】如图所示，$\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2=\sqrt{3}$，解得 $AB=2$；而 $\angle ACB=45°$，故点 $C$ 在圆的优弧上运动，当运动到最高处，使得 $CA=CB$ 时，$\triangle ABC$ 的面积最大且平面 $PAB\perp$ 底面 $ABC$ 时，三棱锥 $P-ABC$ 的体积最大. 分别过 $\triangle PAB$ 和 $\triangle ABC$ 的外心做垂线，垂线的交点即为球心 $O$. 设 $\triangle PAB$ 和 $\triangle ABC$ 外接圆半径分别为 $r_1$，$r_2$，三棱锥 $P-ABC$ 外接球半径为 $R$，则 $r_1=\frac{2}{\sqrt{3}}$，$r_2=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sin 45°}=\sqrt{2}$，故 $R^2=r_2^2+(\frac{1}{2}r_1)^2=2+\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$，故 $R=\frac{\sqrt{21}}{3}$.




13. $y=\frac{13}{4}x-\frac{7}{4}$ 【解析】依题意，$f'(x)=\frac{1-\ln(2x)}{x^2}-3x^2$，故 $f'(\frac{1}{2})=4-\frac{3}{4}=\frac{13}{4}$，而 $f(\frac{1}{2})=-\frac{1}{8}$，故所求切线方程为 $y+\frac{1}{8}=\frac{13}{4}(x-\frac{1}{2})$，即 $y=\frac{13}{4}x-\frac{7}{4}$.

14. $\frac{5}{3}$ 【解析】作出不等式组所表示的平面区域如图中阴影部分所示；观察可知，当 $z=x+4y$ 过点 $C$ 时，$z$ 有最小值；联立 $\begin{cases}x+2y=1,\\ x-y=0,\end{cases}$ 解得 $x=y=\frac{1}{3}$，即 $C(\frac{1}{3},\frac{1}{3})$，故 $z=x+4y$ 的最小值为 $\frac{5}{3}$.




15. 136 【解析】依题意，共分为 50 组，每组人数为 $\frac{800}{50}=16$，故第 9 组抽到的号码是 $40+16\times 6=136$.

16. $y=\pm 2x$ 【解析】因为 $\frac{|MN|}{2}+|MF_2|=|MF_1|$，故 $|MN|=2(|MF_1|-|MF_2|)=4a$，因为 $\triangle MON$ 为等边三角形，故 $|OM|=4a$，$\angle MON=60°$，则 $x_1=4a\cos 60°=2a$，$y_1=4a\sin 60°=2\sqrt{3}a$，则 $\frac{(2a)^2}{a^2}-\frac{(2\sqrt{3}a)^2}{b^2}=1$，解得 $b=2a$，故双曲线 $C$ 的渐近线方程为 $y=\pm 2x$.

17.【解析】(1) 依题意，$(0.005+a+b+0.035+0.028)\times 10=1$，故 $a+b=0.032$；………… 2 分

而 $a-b=0.016$，联立两式解得：$a=0.024$，$b=0.008$；………………………………………… 4 分

故测试分数在 $[60,90)$ 的概率 $P=(0.024+0.035+0.028)\times 10=0.87$，

故所求人数为 $1200\times 0.87=1044$；………… 5 分

(2) 依题意，所求平均数为 $55\times 0.05+65\times 0.24+75\times 0.35+85\times 0.28+95\times 0.08$
$=2.75+15.6+26.25+23.8+7.6=76$；………………………………………………………… 8 分

所求中位数为 $70+\frac{0.5-0.05-0.24}{0.035}=76$. ……………………………………………………… 10 分

18.【解析】(1) 依题意，$2S_n=(1-\frac{1}{3^n})a_{n+1}$，

$2S_{n+1}=(1-\frac{1}{3^{n+1}})a_{n+2}$，………………………… 1 分

两式相减可得，$(1-\frac{1}{3^{n+1}})(a_{n+2}-3a_{n+1})=0$，

故 $a_{n+2}=3a_{n+1}$，………………………………………… 3 分

而 $2S_1=\frac{2}{3}a_2$，故 $a_2=3a_1$， ………………… 5 分

故数列$\{a_n\}$是以 1 为首项，3 为公比的等比数列；

………………………………………………… 6 分

(2)由(1)可知 $a_n=3^{n-1}$，$b_n=(-1)^n\cdot(\log_9 a_n)^2=(-1)^n\cdot(\log_9 3^{n-1})^2=\frac{1}{4}\cdot(-1)^n\cdot(n-1)^2$，…

………………………………………………… 7 分

故 $b_{2n-1}+b_{2n}=\frac{1}{4}\cdot[(-1)^{2n-1}\cdot(2n-2)^2+(-1)^{2n}\cdot(2n-1)^2]=\frac{1}{4}(4n-3)$，………… 9 分

记数列$\{b_n\}$的前 $2n$ 项和为 $T_{2n}$，

则 $T_{2n}=\frac{1}{4}(1+5+9+\cdots+4n-3)=\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{4}n$.

……………………………………………… 12 分

19.【解析】(1)因为 $4a\sin B\cos C+4c\sin(B+C)\cos B=\sqrt{15}a$，

故由正弦定理，得 $\sin B\sin A\cos C+\sin C\sin A\cos B=\frac{\sqrt{15}\sin A}{4}$，……………………………………… 2 分

因为 $\sin A\neq 0$，所以 $\sin B\cos C+\sin C\cos B=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

所以 $\sin(B+C)=\frac{\sqrt{15}}{4}$，所以 $\sin(\pi-A)=\frac{\sqrt{15}}{4}$，

所以 $\sin A=\frac{\sqrt{15}}{4}$，…………………………… 4 分

故 $\cos A=\pm\sqrt{1-\sin^2 A}=\pm\frac{1}{4}$，即 $\tan A=\pm\sqrt{15}$；…………………………………………… 6 分

(2)因为 $A\in(0,\frac{\pi}{2})$，由(1)可知，$\cos A=\frac{1}{4}$，

由余弦定理得，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

因为 $a=6$，$b=4\sqrt{2}$，即 $36=32+c^2-2\times4\sqrt{2}\times c\times\frac{1}{4}$，……………………………………………… 8 分

所以 $c^2-2\sqrt{2}c-4=0$，解得 $c=\sqrt{2}\pm\sqrt{6}$；………

……………………………………………… 11 分

又 $c>0$，所以 $c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$. ………………… 12 分

20.【解析】(1)证明：因为$\angle CBD=90°$，

故 $CB\perp BD$，……………………………………… 1 分

又平面 $SBD\cap$平面 $ABCD=BD$，平面 $SBD\perp$平面 $ABCD$，

故 $CB\perp$平面 $SBD$；……………………………… 3 分

又 $SD\subset$平面 $SBD$，故 $CB\perp DS$. ………… 5 分

(2)因为平面 $BMN\parallel$平面 $ADT$，

故 $AD\parallel BM$，$DT\parallel MN$，

又 $AB\parallel DM$，故 $DM=AB=1$，

故点 $M$ 是 $DC$ 的中点，……………………… 7 分

又$\triangle CDT$ 中，$MN\parallel DT$，$M$ 是 $DC$ 的中点，

故 $N$ 是 $TC$ 的中点，

故 $V_{D-MNB}=V_{N-DMB}=\frac{1}{2}V_{T-DMB}=\frac{1}{2}V_{S-DMB}$，…

……………………………………………… 9 分

设 $BD$ 的中点为 $O$，因为 $DS=DB=BS$，

故 $SO\perp DB$，

又因为平面 $SBD\perp$平面 $ABCD$，

故 $SO\perp$平面 $ABCD$，

故 $V_{D-MNB}=\frac{1}{2}V_{S-DMB}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times SO\times S_{\triangle BDM}=\frac{1}{6}\times\frac{\sqrt{6}}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}}{24}$. ……………………… 12 分

21.【解析】(1)设抛物线 $C$ 的准线为$l'$，过点 $M$ 作 $MM'\perp l'$，垂足为$M'$，

过点 $N$ 作 $NN'\perp l'$，垂足为$N'$，…………… 1 分

则$|MN|+|MF|=|MN|+|MM'|\geq|NN'|=\frac{7}{2}$，

即$|MN|+|MF|$的最小值为$\frac{7}{2}$；…………… 4 分

(2)设直线 $l$ 的方程为 $y=kx+b$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$；

将直线 $l$ 与抛物线 $C$ 的方程联立得$\begin{cases}y=kx+b\\y^2=-2x\end{cases}$，

$k^2x^2+(2kb+2)x+b^2=0$，…………………… 6 分

$x_1+x_2=\frac{-2kb-2}{k^2}$，$x_1x_2=\frac{b^2}{k^2}$①，

又 $k_{MP}+k_{MQ}=\frac{y_1-2}{x_1+2}+\frac{y_2-2}{x_2+2}=-2$，……… 7 分

即$(kx_1+b-2)(x_2+2)+(kx_2+b-2)(x_1+2)=-2(x_1+2)(x_2+2)$，

$2kx_1x_2+2k(x_1+x_2)+b(x_1+x_2)-2(x_1+x_2)+4b-8=-2x_1x_2-4(x_1+x_2)-8$，

将①代入得，$b^2-b-2-2k(b+1)=0$，

即$(b+1)(b-2-2k)=0$，得 $b=-1$ 或 $b=2+2k$，

……………………………………………… 9 分

当 $b=-1$ 时，直线 $l$ 为 $y=kx-1$，此时直线恒过$(0,-1)$；…………………………………… 10 分

当 $b=2+2k$ 时，直线 $l$ 为 $y=kx+2k+2=k(x+2)+2$，此时直线恒过 $M(-2,2)$(舍去)；

综上所述，直线 $l$ 过定点$(0,-1)$. ………… 12 分

22.【解析】(1)依题意，$f'(x)=\frac{4}{x}+2x-2m=2\times\frac{x^2-mx+2}{x}$，…………………………………… 1 分

令 $y=x^2-mx+2$，则 $\Delta=m^2-8$，

若 $-2\sqrt{2}\leqslant m\leqslant 2\sqrt{2}$，则 $\Delta\leqslant 0$，则 $f'(x)\geqslant 0$，

故函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；…… 2 分

若 $m<-2\sqrt{2}$ 或 $m>2\sqrt{2}$，$y=x^2-mx+2$ 有两个零点 $x_1,x_2$，则 $x_1x_2=2>0$，

其中 $x_1=\frac{m-\sqrt{m^2-8}}{2}$，$x_2=\frac{m+\sqrt{m^2-8}}{2}$；

若 $m<-2\sqrt{2}$，则 $x_1<0$，$x_2<0$，此时 $f'(x)>0$，故函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

若 $m>2\sqrt{2}$，则 $x_1>0$，$x_2>0$，此时当 $x\in(0,x_1)$ 时，$f'(x)>0$，当 $x\in(x_1,x_2)$ 时，$f'(x)<0$，当 $x\in(x_2,+\infty)$ 时，$f'(x)>0$，故函数 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(x_1,x_2)$ 上单调递减；

………………………………………………… 4 分

综上所述，$m\leqslant 2\sqrt{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $m>2\sqrt{2}$ 时，函数 $f(x)$ 在 $(0,x_1)$ 和 $(x_2,+\infty)$ 上单调递增，在 $(x_1,x_2)$ 上单调递减.

………………………………………………… 5 分

(2)假设存在一条直线与函数 $y=\frac{f(x)}{2}$ 的图象有两个不同的切点 $T_1(x_1,y_1)$，$T_2(x_2,y_2)$，… 6 分

不妨令 $0<x_1<x_2$，则 $T_1$ 处切线 $l_1$ 的方程为：$y-\frac{f(x_1)}{2}=\frac{f'(x_1)}{2}\cdot(x-x_1)$，$T_2$ 处切线 $l_2$ 的方程为：$y-\frac{f(x_2)}{2}=\frac{f'(x_2)}{2}\cdot(x-x_2)$.

因为 $l_1$，$l_2$ 为同一直线，

所以 $\begin{cases}f'(x_1)=f'(x_2),\\ f(x_1)-x_1f'(x_1)=f(x_2)-x_2f'(x_2).\end{cases}$ …

…………………………………………………… 7 分

即 $\begin{cases}\frac{2}{x_1}+x_1-m=\frac{2}{x_2}+x_2-m,\\ 2\ln x_1+\frac{1}{2}x_1^2-mx_1-x_1\left(\frac{2}{x_1}+x_1-m\right)\\ \quad=2\ln x_2+\frac{1}{2}x_2^2-mx_2-x_2\left(\frac{2}{x_2}+x_2-m\right).\end{cases}$

整理得 $\begin{cases}x_1x_2=2,\\ 2\ln x_1-\frac{1}{2}x_1^2=2\ln x_2-\frac{1}{2}x_2^2.\end{cases}$

消去 $x_2$ 得，$2\ln\frac{x_1^2}{2}+\frac{2}{x_1^2}-\frac{x_1^2}{2}=0$. ① ………… 9 分

令 $t=\frac{x_1^2}{2}$，由 $0<x_1<x_2$ 与 $x_1x_2=2$，得 $t\in(0,1)$，

记 $p(t)=2\ln t+\frac{1}{t}-t$，则 $p'(t)=\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}-1=-\frac{(t-1)^2}{t^2}<0$，

所以 $p(t)$ 为 $(0,1)$ 上的单调减函数，所以 $p(t)>p(1)=0$. 从而①式不可能成立，所以假设不成立，

…………………………………………… 11 分

即若直线 $l$ 为曲线 $y=\frac{f(x)}{2}$ 的切线，则直线 $l$ 与曲线 $y=\frac{f(x)}{2}$ 不可能有 2 个切点. ………… 12 分