四、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

17.（10 分）

（Ⅰ）若 $m=\left(\frac{25}{4}\right)^{0.5}-0.75^2+6^{-2}\times\left(\frac{27}{64}\right)^{\frac{2}{3}}$，求 $m^{\frac{1}{3}}$ 的值；

（Ⅱ）若 $a=27,b=16$，求 $\frac{(-2\sqrt{ab})\times(-8\sqrt[3]{a^2b^5})}{\sqrt[6]{a^2b^7}\times4\sqrt[4]{a^2b^5}}$ 的值.

18.（12 分）

已知集合 $A=\{x|x^2-(a+2)x+a+1\leqslant0\}$，$B=\left\{x\left|\frac{x+3}{x-1}\leqslant0\right.\right\}$.

（Ⅰ）若 $a=-5$，求 $A\cup B$；

（Ⅱ）若 $(\complement_{\mathbf{R}}B)\cup A=\mathbf{R}$，求实数 a 的取值范围.

19.（12 分）

已知函数 $f(x)=(2a^2-7a+4)a^x$ 是单调递减的指数函数.

（Ⅰ）求 a 的值；

（Ⅱ）求不等式 $f(2x)-f(x-1)>f(-3)$ 的解集.

20.（12 分）

已知函数 $f(x)=x|x-a|+3(a\geqslant0)$.

（Ⅰ）若 $f(x)$ 在区间 $(1,2)$ 上单调递减，求 a 的值；

（Ⅱ）若 $a=0$，求不等式 $f(3x+1)>6-f(2x+3)$ 的解集.

21.（12 分）

某蔬菜仓库供应甲、乙两个大型超市. 蔬菜仓库的设计容量为 45 万吨，去年年底时该仓库的蔬菜存储量为 9 万吨，从今年开始，每个月购进蔬菜 m 万吨，再按照需求量向两个超市调出蔬菜. 已知甲超市每月的蔬菜需求量为 1 万吨，乙超市前 x 个月的蔬菜总需求量为 $k\sqrt{x}$ 万吨，其中 $1\leqslant x\leqslant12$ 且 $x\in\mathbf{N}^*$，且前 4 个月，乙超市的蔬菜总需求量为 12 万吨.

（Ⅰ）求第 x 个月月底时，该仓库的蔬菜存储量 M（万吨）与 x 的函数关系式；

（Ⅱ）若要今年每月按计划购进蔬菜之后，仓库总能满足两个超市的需求，且每月调出蔬菜后，仓库的蔬菜剩余量不超过设计容量，试确定 m 的取值范围.

22.（12 分）

已知函数 $f(x)=3^x+k3^{-x}$ 为奇函数.

（Ⅰ）求实数 k 的值，并判断函数 $f(x)$ 的单调性；

（Ⅱ）当 $x\leqslant0$ 时，求函数 $g(x)=9^x+9^{-x}-2f(x)$ 的最小值；

（Ⅲ）若函数 $f(x)$ 在区间 $[x_1,x_2]$ 上的值域为 $[m(3^{x_1}-1),m(3^{x_2}-1)]$，求实数 m 的取值范围.

天一大联考
2022—2023 学年(上)高一年级期中考试
数学·答案

一、单项选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

1. 答案 C

命题意图 本题考查集合的表示与运算.

解析 因为 $A=\{-1,0,1,2,3\}$,$B=\{x\mid -1<x<2\}$,所以 $A\cap B=\{0,1\}$.

2. 答案 A

命题意图 本题考查命题的否定.

解析 “$\forall x>0,2^x>1$”是全称量词命题,根据全称量词命题与存在量词命题的关系,可得其否定是“$\exists x>0,2^x\leqslant 1$”.

3. 答案 C

命题意图 本题考查函数的定义域.

解析 由题意知$\begin{cases}2-x\geqslant 0,\\ x\neq 0\end{cases}\Rightarrow x\leqslant 2$ 且 $x\neq 0$.

4. 答案 D

命题意图 本题考查分段函数求值.

解析 $f(0)=2$,则 $f(f(0))=f(2)=8+a^2=6a$,可得 $a=2$ 或 $a=4$.

5. 答案 D

命题意图 本题考查指数函数的应用.

解析 设平均下降率为 $x(x>0)$,则 $500(1-x)^2=320$,得 $(1-x)^2=0.64$,得 $x=0.2$.

6. 答案 B

命题意图 本题考查二次函数的性质及基本不等式的应用.

解析 由题图可知,抛物线与 x 轴的交点为 $(2,0)$ 和 $(18,0)$,则其顶点为 $(10,64)$. 设二次函数解析式为 $y=a(x-2)(x-18)$,将 $(10,64)$ 代入得 $-64a=64$,得 $a=-1$,所以 $y=-(x-2)(x-18)=-x^2+20x-36$,所以 $\dfrac{y}{x}=-\left(x+\dfrac{36}{x}\right)+20\leqslant -2\sqrt{x\cdot\dfrac{36}{x}}+20=8$,当且仅当 $x=6$ 时取等号.

7. 答案 C

命题意图 本题考查奇函数的图象.

解析 将函数 $f(x)$ 的图象向左平移 1 个单位长度,得到函数 $f(x+1)$ 的图象,再向下平移 1 个单位长度即得到函数 $f(x+1)-1$ 的图象,此函数图象关于原点对称,故函数 $f(x+1)-1$ 为奇函数.

8. 答案 B

命题意图 本题考查函数的解析式,以及分段函数的性质.

解析 由 $f(x)=3f(|x|)+x^2-2x$,得 $f(|x|)=3f(|x|)+x^2-2|x|$,所以 $f(|x|)=-\dfrac{1}{2}x^2+|x|$,所以 $f(x)=3f(|x|)+x^2-2x=-\dfrac{3}{2}x^2+3|x|+x^2-2x=-\dfrac{1}{2}x^2+3|x|-2x=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}x^2+x,x\geqslant 0,\\ -\dfrac{1}{2}x^2-5x,x<0,\end{cases}$ 当 $x\geqslant 0$ 时,单调递增区间

为 $[0,1]$,当 $x<0$ 时,单调递增区间为 $(-\infty,-5]$,综上可得函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $[0,1]$ 和 $(-\infty,-5]$.

二、多项选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 每小题全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.

9. 答案　AC

命题意图　本题考查不等式的解法,以及充分条件与必要条件的判断.

解析　解不等式 $-x^2-x+6\geqslant 0$,得 $-3\leqslant x\leqslant 2$,结合四个选项,A,C 是其充分不必要条件,B 是其必要不充分条件,D 是其充分必要条件.

10. 答案　BD

命题意图　本题考查指数及指数函数的性质.

解析　对于 A,当 $a=0$ 时,0^{-1} 没有意义,故 A 错误;对于 B,$2^{\frac{4}{3}}=16^{\frac{1}{3}}$,$4^{\frac{2}{5}}=16^{\frac{1}{5}}$,因为 $25^{\frac{1}{3}}>16^{\frac{1}{3}}>16^{\frac{1}{5}}$,所以 $25^{\frac{1}{3}}>2^{\frac{4}{3}}>4^{\frac{2}{5}}$,故 B 正确;对于 C,当 $x<0$ 时,$3^x<2^x$,故 C 错误;对于 D,因为 $2^x+2^{-x}\geqslant 2\sqrt{2^x\cdot 2^{-x}}=2$,当且仅当 $x=0$ 时取等号,故 D 正确.

11. 答案　BCD

命题意图　本题考查不等式的性质.

解析　对于 A,$\frac{b}{a}-\frac{b-2}{a-2}=\frac{2(a-b)}{a(a-2)}<0$,故 A 错误;对于 B,由 $a<b<0$ 得 $a^2>b^2$,所以 $\frac{2a+b}{a+2b}-\frac{a}{b}=\frac{b^2-a^2}{(a+2b)b}<0$,故 B 正确;对于 C,由 $a<b<0$,得 $-a>-b>0$,$-a>b-a>0$,所以 $\sqrt{-a}>\sqrt{-b}$,$\sqrt{-a}>\sqrt{b-a}$,所以 $2\sqrt{-a}>\sqrt{b-a}+\sqrt{-b}$,故 C 正确;对于 D,$|a|=-a>-b$,故 D 正确.

12. 答案　ABD

命题意图　本题考查抽象函数的性质.

解析　对于 A,令 $x=1,y=0$,则 $f(1+0)+f(1-0)=2f(1)f(0)$,即 $-2=-2f(0)$,得 $f(0)=1$,故 A 正确;对于 B,对任意实数 y,$f(0+y)+f(0-y)=2f(0)f(y)$,即 $f(y)+f(-y)=2f(y)$,所以 $f(-y)=f(y)$,所以 $f(x)$ 是偶函数,故 B 正确;对于 C,令 $x=1,y=1$,得 $f(2)+f(0)=2f(1)f(1)$,得 $f(2)=1$,令 $x=2,y=1$,得 $f(3)+f(1)=2f(2)f(1)$,得 $f(3)=-1$,令 $x=3,y=1$,得 $f(4)+f(2)=2f(3)f(1)$,得 $f(4)=1$,以此类推,可得当 x 为奇数时,$f(x)=-1$;当 x 为偶数时,$f(x)=1$,所以 $f(1)+f(2)+\cdots+f(2\ 021)=f(2\ 021)=-1$,故 C 错误;对于 D,因为 $f(1)+f(0)=2\left[f\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2=0$,所以 $f\left(\frac{1}{2}\right)=0$,令 $x=y$,得 $f(2x)+f(0)=2[f(x)]^2$,所以 $[f(x)]^2=\frac{1}{2}f(2x)+\frac{1}{2}$,所以 $\left[f\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2=\frac{1}{2}f(2x+1)+\frac{1}{2}$,所以 $[f(x)]^2+\left[f\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2=\frac{1}{2}[f(2x)+f(2x+1)]+1$,而 $f(2x+1)+f(2x)=2f\left(2x+\frac{1}{2}\right)f\left(\frac{1}{2}\right)=0$,所以 $[f(x)]^2+\left[f\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2=1$.

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 答案　14

命题意图　本题考查函数的概念.

解析　$f(0)=f(3-3)=3^2+9-4=14$.

14. 答案　3

命题意图　本题考查集合的表示与性质.

解析　集合 A 只有 2 个子集,则 A 中只有 1 个元素. 若 $a=0$,方程等价为 $3=0$,等式不成立,不满足条件;若 $a\neq 0$,则方程满足 $\Delta=0$,即 $4a^2-12a=0$,解得 $a=3$ 或 $a=0$(舍去).

15. 答案　$7+4\sqrt{3}$

命题意图 本题考查基本不等式的应用.

解析 因为 $a+2b=ab$,所以$\frac{a+2b}{ab}=\frac{1}{b}+\frac{2}{a}=1$,$ab+a+b=a+2b+a+b=2a+3b=(2a+3b)\left(\frac{1}{b}+\frac{2}{a}\right)=7+\frac{2a}{b}+\frac{6b}{a}\geqslant 7+2\sqrt{12}=7+4\sqrt{3}$,当且仅当$\frac{2a}{b}=\frac{6b}{a}$时等号成立.

16. **答案** $(-\infty,-1]$

命题意图 本题考查分段函数的性质.

解析 若 $a=0$,$f(x)=\begin{cases}x^3+1,x<0,\\0,x\geqslant 0,\end{cases}$没有最大值;若 $a<0$,当 $x<a$ 时,$f(x)=x^3+1$ 单调递增,$f(x)<a^3+1$,当 $x\geqslant a$ 时,$f(x)_{\max}=0$,$\therefore a^3+1\leqslant 0$,解得 $a\leqslant -1$;若 $a>0$,当 $x\in(2,+\infty)$时,$f(x)$单调递增,没有最大值. 综上$a\leqslant -1$.

四、解答题:共 70 分. 解答应写出文字说明,证明过程或演算步骤.

17. **命题意图** 本题考查幂指数的运算性质.

解析 (Ⅰ)$m=\left(\frac{25}{4}\right)^{0.5}-\left(\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{36}\times\frac{9}{16}=\frac{5}{2}-\frac{9}{16}+\frac{1}{64}=\frac{125}{64}$, ……(3 分)

所以 $m^{\frac{1}{3}}=\left(\frac{125}{64}\right)^{\frac{1}{3}}=\frac{5}{4}$. ……(5 分)

(Ⅱ)原式$=4\times a^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}}\times b^{\frac{1}{2}+\frac{5}{3}-\frac{7}{6}-\frac{5}{4}}=4a^{\frac{1}{3}}b^{-\frac{1}{4}}$

$=4\times 27^{\frac{1}{3}}\times 16^{-\frac{1}{4}}=6$. ……(10 分)

18. **命题意图** 本题考查集合的运算,不等式的解法.

解析 (Ⅰ)若 $a=-5$,则 $A=\{x|x^2+3x-4\leqslant 0\}=\{x|-4\leqslant x\leqslant 1\}$, ……(2 分)

$B=\{x|-3\leqslant x<1\}$, ……(4 分)

所以 $A\cup B=[-4,1]$. ……(6 分)

(Ⅱ)由已知得 $A=\{x|(x-a-1)(x-1)\leqslant 0\}$,

由$(\complement_{\mathbf{R}}B)\cup A=\mathbf{R}$ 得 $B\subseteq A$, ……(8 分)

所以 $A=\{x|a+1\leqslant x\leqslant 1\}$,且 $a+1\leqslant -3$, ……(10 分)

得 $a\leqslant -4$,

即实数 a 的取值范围是$(-\infty,-4]$. ……(12 分)

19. **命题意图** 本题考查指数函数的概念和性质.

解析 (Ⅰ)因为$f(x)$是指数函数,所以 $2a^2-7a+4=1$, ……(1 分)

即 $2a^2-7a+3=0$,解得 $a=3$ 或 $a=\frac{1}{2}$. ……(3 分)

又因为$f(x)$单调递减,所以 $0<a<1$, ……(4 分)

所以 $a=\frac{1}{2}$. ……(5 分)

(Ⅱ)不等式$f(2x)-f(x-1)>f(-3)$即$\left(\frac{1}{2}\right)^{2x}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}>\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$,

整理得$\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]^2-2\times\left(\frac{1}{2}\right)^x-8>0$. ……(7 分)

设 $t=\left(\frac{1}{2}\right)^x$,$t>0$. 上述不等式转化为 $t^2-2t-8>0$, ……(8 分)

即$(t-4)(t+2)>0$,因为$t>0$,所以$t>4$, ……（10分）

即$\left(\frac{1}{2}\right)^x>4=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$,所以$x<-2$,

即原不等式的解集为$(-\infty,-2)$. ……（12分）

20. **命题意图** 本题考查分段函数的性质.

解析 （Ⅰ）$f(x)=x|x-a|+3=\begin{cases}-x^2+ax+3, x\leqslant a,\\ x^2-ax+3, x>a,\end{cases}$ ……（1分）

故$f(x)$在$\left(-\infty,\frac{a}{2}\right)$上单调递增,在$\left(\frac{a}{2},a\right)$上单调递减,在$(a,+\infty)$上单调递增, ……（3分）

因为$f(x)$在$(1,2)$上单调递减,所以$\begin{cases}\frac{a}{2}\leqslant 1,\\ a\geqslant 2,\end{cases}$ ……（5分）

解得$a=2$. ……（6分）

（Ⅱ）当$a=0$时,$f(x)=x|x|+3$,记$g(x)=x|x|=\begin{cases}-x^2, x<0,\\ x^2, x\geqslant 0,\end{cases}$ ……（7分）

则$g(-x)=-g(x)$,故$g(x)$为奇函数,且$g(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增. ……（8分）

不等式$f(3x+1)>6-f(2x+3)$可化为$g(3x+1)+3+g(2x+3)+3>6$,

即$g(3x+1)+g(2x+3)>0$,所以$g(3x+1)>-g(2x+3)$,

即$g(3x+1)>g(-2x-3)$, ……（10分）

由$g(x)$在$\mathbf{R}$上单调递增,得$3x+1>-2x-3$,解得$x>-\frac{4}{5}$.

故原不等式的解集为$\left(-\frac{4}{5},+\infty\right)$. ……（12分）

21. **命题意图** 本题考查函数模型的应用.

解析 （Ⅰ）$\because$ 前4个月,乙超市的蔬菜总需求量为12万吨,

$\therefore \sqrt{4k}=12$,得$k=6$. ……（2分）

$\therefore M=9+mx-x-6\sqrt{x}\,(1\leqslant x\leqslant 12$且$x\in\mathbf{N}^*)$. ……（4分）

（Ⅱ）由题意,当$1\leqslant x\leqslant 12$且$x\in\mathbf{N}^*$时,

$M=9+mx-x-6\sqrt{x}\geqslant 0$,且$M=9+mx-x-6\sqrt{x}\leqslant 45$. ……（5分）

①由$9+mx-x-6\sqrt{x}\geqslant 0$,得$m\geqslant -\frac{9}{x}+\frac{6}{\sqrt{x}}+1$,

要使该式恒成立,则$m\geqslant\left(-\frac{9}{x}+\frac{6}{\sqrt{x}}+1\right)_{\max}$. ……（6分）

考察函数$y=-\frac{9}{x}+\frac{6}{\sqrt{x}}+1=-9\left(\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{3}\right)^2+2\,(1\leqslant x\leqslant 12$且$x\in\mathbf{N}^*)$,

当$x=9$时,y有最大值为2,

所以$m\geqslant 2$. ……（8分）

②由$9+mx-x-6\sqrt{x}\leqslant 45$,得$m\leqslant\frac{36}{x}+\frac{6}{\sqrt{x}}+1$,

要使该式恒成立,则$m\leqslant\left(\frac{36}{x}+\frac{6}{\sqrt{x}}+1\right)_{\min}$. ……（9分）

因为函数 $y=\frac{36}{x}+\frac{6}{\sqrt{x}}+1$ 在定义域上单调递减，所以当 $x=12$ 时，$y=\frac{36}{x}+\frac{6}{\sqrt{x}}+1$ 取得最小值 $4+\sqrt{3}$.

所以 $m\leqslant 4+\sqrt{3}$. ……………………………………………………………（11 分）

综上，m 的取值范围为 $[2,4+\sqrt{3}]$. ……………………………………………………（12 分）

22. **命题意图** 本题考查函数的单调性和奇偶性的应用，以及定义域和值域.

解析 （Ⅰ）因为函数 $f(x)=3^x+k3^{-x}$ 为奇函数，所以 $f(0)=3^0+k3^0=1+k=0$，

得 $k=-1$. ……………………………………………………………………………（1 分）

验证可知此时 $f(x)=3^x-3^{-x}$ 为奇函数，故 $k=-1$. ……………………………………（2 分）

因为 $y=3^x$ 为增函数，$y=3^{-x}$ 为减函数，

故 $f(x)=3^x-3^{-x}$ 为增函数. ……………………………………………………………（4 分）

（Ⅱ）由（Ⅰ）可得，当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=3^x-3^{-x}\in(-\infty,0]$. ………………………………（5 分）

因为 $9^x+9^{-x}=(3^x-3^{-x})^2+2$，所以 $g(x)=[f(x)]^2-2f(x)+2$. ……………………………（6 分）

设 $t=f(x)$，函数 $h(t)=t^2-2t+2(t\leqslant 0)$，则当 $t=0$ 时，$h(t)$ 取得最小值 2，

所以当 $x\leqslant 0$ 时，$g(x)$ 的最小值为 2. ……………………………………………………（8 分）

（Ⅲ）由（Ⅰ）可知 $f(x)$ 为增函数，

所以当 $x\in[x_1,x_2]$ 时，$f(x)$ 的值域为 $[3^{x_1}-3^{-x_1},3^{x_2}-3^{-x_2}]$，……………………………（9 分）

所以 $\begin{cases}m(3^{x_1}-1)=3^{x_1}-3^{-x_1},\\ m(3^{x_2}-1)=3^{x_2}-3^{-x_2},\end{cases}$ 即 $m(3^x-1)=3^x-3^{-x}$ 在 $\mathbf{R}$ 上有两解，…………………………（10 分）

即 $m3^x(3^x-1)=(3^x-1)(3^x+1)$ 在 $\mathbf{R}$ 上有两解，

显然该方程有一个解为 $x=0$，

所以只需方程 $m3^x=3^x+1$ 在 $\mathbf{R}$ 上有一个解即可，……………………………………（11 分）

则 $m=1+\frac{1}{3^x}\in(1,+\infty)$，又 $m=2$ 时，$x=0$，原方程只有一个解，故 $m\neq 2$.

综上得实数 m 的取值范围是 $(1,2)\cup(2,+\infty)$. ……………………………………………（12 分）

注：如果没有排除 2，即答案为 $(1,+\infty)$ 也不扣分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。