绝密★启用前

2021—2022学年高三年级二轮复习阶段性测试

数　学(理)

注意事项:

1. 答卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时,选出每小题答案后,用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号。回答非选择题时,将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后,将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $A=\{x|2^{3x-2}>1\}$, $B=\{y|y=2-x,x\in A\}$,则 $A\cap B=$

A. $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right]$　B. $\left(\frac{4}{3},+\infty\right)$　C. $\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$　D. $\left(\frac{2}{3},+\infty\right)$

2. $\frac{7-3i}{i}$的共轭复数为

A. $-3+7i$　B. $3-7i$　C. $3+7i$　D. $-3-7i$

3. 法国数学家马林·梅森是研究素数的数学家中成就很高的一位,人们将"2^p-1(p为素数)"形式的素数称为"梅森素数",目前仅发现51个"梅森素数",可以估计,$2^{67}-1$这个"梅森素数"的位数为(参考数据:$\lg 2\approx0.301$)

A. 19　B. 20　C. 21　D. 22

4. 5G基站建设是众多"新基建"的工程之一,截至2021年7月底,A地区已经累计开通5G基站300个,未来将进一步完善基础网络体系,加快推进5G网络建设.已知2021年8月该地区计划新建50个5G基站,以后每个月比上一个月多建40个,预计A地区累计开通4070个5G基站要到

A. 2022年12月底　B. 2022年11月底

C. 2022年9月底　D. 2022年8月底

5. 在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,E为线段A_1B_1的中点,则异面直线D_1E与BC_1所成角的余弦值为

A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$　B. $\frac{\sqrt{10}}{5}$　C. $\frac{\sqrt{15}}{5}$　D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

6. 若函数$f(x)=(3^{x+1}-a\cdot3^{-x-1})\cos\left(\frac{3\pi}{2}+2x\right)$为偶函数,则实数$a=$

A. -9　B. 3　C. -3　D. 9

7. 甲、乙两人玩猜数字游戏,他们心中各想一个数字,分别记为x,y,其中$x,y\in[0,2]$,当$|x-y|\le1$时,称"甲乙心有灵犀",则"甲乙心有灵犀"的概率为

A. $\frac{1}{2}$　B. $\frac{5}{8}$　C. $\frac{3}{4}$　D. $\frac{7}{8}$

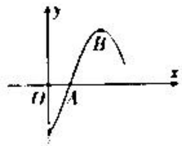
8. 若$\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+3\sin\alpha=0$,则$\cos2\alpha=$

A. $\frac{11}{14}$　B. $\frac{9}{14}$　C. $\frac{5\sqrt{3}}{14}$　D. $\frac{7\sqrt{3}}{23}$

9. 已知$\triangle ABC$中,$AB=AC=3$,$BC=3\sqrt{3}$,现以BC为旋转轴旋转360°得到一个旋转体,则该旋转体的内切球的表面积为

A. 27π　B. $\frac{27\pi}{2}$　C. $\frac{27\pi}{8}$　D. $\frac{27\pi}{4}$

10. 已知函数 $f(x)=3\sin(\omega x+\varphi)\left(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2}\right)$ 的部分图象如下所示，其中 $A\left(\frac{2\pi}{3},0\right)$，$B\left(\frac{5\pi}{3},3\right)$，将 $f(x)$ 的图象的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{4}$，再向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后，得到函数 $g(x)$ 的图象，则 $g(x)$ 的一条对称轴方程是



A. $x=-\frac{3\pi}{4}$ B. $x=-\frac{3\pi}{2}$ C. $x=-\frac{3\pi}{8}$ D. $x=-\pi$

11. 已知双曲线 $C:\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左、右焦点分别为 F_1,F_2，若点 M,N 满足 $|MF_2|-|MF_1|=|NF_1|-|NF_2|=2a$，且四边形 $MNOF_1$ 为菱形，则 C 的离心率为

A. $\sqrt{3}+3$ B. $\sqrt{3}+1$ C. $\sqrt{3}$ D. 3

12. 若关于 x 的不等式 $e^x+\sin x\geqslant(1-b)x+1$ 在 $[0,+\infty)$ 上恒成立，则实数 b 的取值范围为

A. $[-e,+\infty)$ B. $[-1,+\infty)$ C. $\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$ D. $[-2,+\infty)$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 已知向量 $a=(3,-2)$，$b=(2,-1)$，若 $(2a+kb)\perp a$，则实数 $k=$ ________.

14. 某地区教研部门开展高三教师座谈会，每名教师被抽到发言的概率均为 p，且是否被抽到发言相互独立，已知某校共有 8 名教师参加座谈会，记 X 为该校教师中被抽到发言的人数，若 $D(X)=\frac{16}{9}$，且 $E(X)>4$，则 $E(X)=$ ________.

15. 已知抛物线 $C:y^2=6x$ 与直线 l 交于 A,B 两点，若线段 AB 中点的纵坐标为 3，则 l 的倾斜角为________.

16. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=\frac{a_2}{2}=1$，且 $S_{n+2}=S_{n+1}+a_n+1+(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$，则 $S_{50}=$ ________.

三、解答题：共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤. 第 17～21 题为必考题，每个试题考生都必须作答. 第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答.

(一)必考题：共 60 分.

17.（12 分）在 $\triangle ABC$ 中，内角 A,B,C 所对的边分别为 a,b,c，且 $c=6$，$2\sqrt{3}\tan\frac{C}{2}+\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}=2$.

(1)求角 C 的大小；

(2)若________，求 $\triangle ABC$ 的周长.

从下列三个条件中任选 1 个，补充在上面问题的横线中，然后对问题进行求解.

①$\triangle ABC$ 的面积为 $36\sin A$，②$2a\cos C+2c\cos A=\frac{\sqrt{3}b^2}{a}$，③$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=\frac{bc}{2}$.

注：如选择多个条件分别解答，按第一个解答计分.

2

18.（12分）某种机器随着使用年限的增加，其价值逐渐减小，经调查发现，该机器售价为25万元，其使用年限x（单位：年）与价值y（单位：万元）之间的对应关系统计如下表所示.

x	1	3	5	7	9	11	13	15
y	24	23	22	20	19	19	17	16

由上表数据可知，可用线性回归模型（下面简称为模型一）拟合y与x的关系.

（1）求y关于x的线性回归方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$；

（2）研究人员采用另外一种非线性模型（下面简称为模型二）对上述数据进行研究，得到模型二的相关系数$r'=-0.923$.

①计算模型一的相关系数r；

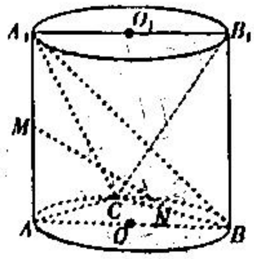
②试根据①中计算结果，说明选择哪种模型拟合效果更好.

参考公式：对于一组具有线性相关关系的数据$(x_i,y_i)(i=1,2,3,\cdots,n)$，其回归直线$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$的斜率和截距的最小二乘估计分别为$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}$，$\hat{a}=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}$；相关系数$r=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})(y_i-\bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}}$；参考数据：$\dfrac{1}{56\sqrt{3}}\approx0.01$.

19.（12分）如图所示，在圆柱OO_1中，ABB_1A_1是圆柱OO_1的一个轴截面，点C是弧AB的中点，M，N分别为线段AA_1，BC的中点，直线$l\perp$平面CA_1B_1.

（1）求证：$l\perp MN$；

（2）若$AA_1=AB$，求直线CB_1与平面A_1BC所成角的正弦值.



20.（12分）已知函数$f(x)=2mx\ln x+\dfrac{1}{x}$.

（1）若曲线$y=f(x)$在$(1,f(1))$处的切线l与直线$x+3y=0$垂直，求实数m的值；

（2）若$\exists x_1,x_2\in(0,+\infty)$，$x_1f(x_1)=x_2f(x_2)$，且$x_1=\dfrac{1}{x_2}\neq1$，求实数$m$的取值范围.

21. (12分)已知椭圆 $C:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0,a\in N^*)$ 过点 $\left(-\sqrt{2},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$，且 C 的上顶点到右顶点的距离为 $\sqrt{7}$.

(1)求 C 的方程;

(2)若点 P,Q,R 都在 C 上，直线 PQ 不与 x 轴垂直，原点 O 恰好是 $\triangle PQR$ 的重心，且点 O 到 PQ 的距离为 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$，求 PQ 的斜率.

(二)选考题:共10分. 请考生在第22、23题中任选一题作答. 如果多做，则按所做的第一题计分.

22. (10分)【选修4-4:坐标系与参数方程】

已知平面直角坐标系 xOy 中，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=1+5t\\y=5t\end{cases}$ (t 为参数). 以坐标原点 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=2\sqrt{2}\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)$.

(1)求 l 的普通方程以及 C 的直角坐标方程;

(2)若 l 与 C 交于 M,N 两点，求 $\frac{1}{|OM|}+\frac{1}{|ON|}$ 的值.

23. (10分)【选修4-5:不等式选讲】

已知函数 $f(x)=\left|x-\frac{4}{m}\right|+|x+m|,m\in R$.

(1)若 $m=4$，求不等式 $f(x)<8$ 的解集;

(2)当 $m>0$ 时，若 $\exists x_0\in R,f(x_0)\leqslant5$，求 m 的取值范围.

2021—2022学年高三年级二轮复习阶段性测试

数学(理)参考答案

1.【答案】C

【解析】依题意，$A=\{x|3x-2>0\}=\left\{x|x>\frac{2}{3}\right\}$，$B=\{y|y=2-x,x\in A\}=\left\{y|y<\frac{4}{3}\right\}$，故$A\cap B=\left(\frac{2}{3},\frac{4}{3}\right)$，故选C.

2.【答案】A

【解析】依题意，$\frac{7-3i}{i}=\frac{7i-3i^2}{i^2}=-3-7i$，其共轭复数为$-3+7i$，故选A.

3.【答案】C

【解析】依题意，$\lg 2^{67}=67\times\lg 2\approx 67\times 0.301=20.167$，故$2^{67}-1$这个"梅森素数"有21位，故选C.

4.【答案】D

【解析】假设要经过k个月，则$50k+\frac{k(k-1)}{2}\cdot 40=4070-300$，解得$k=13$，预计$A$地区累计开通4070个5G基站要到2022年8月底，故选D.

5.【答案】B

【解析】连接AD_1，AE，因为$AD_1/\!/BC_1$，则$\angle AD_1E$即为异面直线D_1E与BC_1所成角，不妨设$AA_1=2$，则$AD_1=2\sqrt{2}$，$D_1E=AE=\sqrt{5}$，$\cos\angle AD_1E=\frac{\frac{AD_1}{2}}{D_1E}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$，故选B.

6.【答案】D

【解析】$f(x)=(3^{x+2}-a\cdot 3^{-x-1})\sin 2x=3\left(3^x-\frac{a}{9}\cdot\frac{1}{3^x}\right)\sin 2x$，易知$y=3\sin 2x$为奇函数，故$y=3^x-\frac{a}{9}\cdot 3^{-x}$为奇函数，则$\frac{a}{9}=1$，解得$a=9$，故选D.

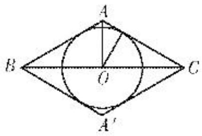
7.【答案】C

【解析】由题意$x,y\in[0,2]$，故区域$\Omega=\{(x,y)|x,y\in[0,2]\}$，面积为4，其中区域$A=\{(x,y)|x,y\in[0,2]$，且$|x-y|\leqslant 1\}$，面积$S=4-\frac{1}{2}\times 1\times 1\times 2=3$，故"甲乙心有灵犀"的概率$P=\frac{3}{4}$，故选C.

8.【答案】A

【解析】依题意，$\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha-\frac{1}{2}\sin\alpha+3\sin\alpha=0$，故$\tan\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{5}$，故$\cos 2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}=\frac{1-\frac{3}{25}}{1+\frac{3}{25}}=\frac{22}{28}=\frac{11}{14}$，故选A.

9.【答案】D



【解析】如图所示，旋转体的轴截面为边长为 3 的菱形，其中$\angle BAC=120^\circ$，内切球的半径$r=AC\cdot\sin 30^\circ\cdot\cos 30^\circ=\frac{3\sqrt{3}}{4}$，故$S=4\times\pi\times\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2=\frac{27\pi}{4}$，故选 D.

10.【答案】A

【解析】依题意，$\frac{T}{4}=\pi$，故$T=4\pi$，故$\omega=\frac{2\pi}{T}=\frac{1}{2}$，故$f(x)=3\sin\left(\frac{1}{2}x+\varphi\right)$，将$B\left(\frac{5\pi}{3},3\right)$代入，可得$3\sin\left(\frac{1}{2}\times\frac{5\pi}{3}+\varphi\right)=3$，故$\frac{5\pi}{6}+\varphi=\frac{\pi}{2}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得$\varphi=-\frac{\pi}{3}+2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，$\varphi=-\frac{\pi}{3}$，则$f(x)=3\sin\left(\frac{1}{2}x-\frac{\pi}{3}\right)$，将$f(x)$的图象的横坐标缩短为原来的$\frac{1}{4}$，得到$y=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)$，再向右平移$\frac{\pi}{3}$个单位长度后，得到$g(x)=3\sin(2x-\pi)=-3\sin 2x$，$g(x)$的对称轴方程为$2x=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in\mathbf{Z})$，解得$x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$，观察可知，故选 A.

11.【答案】B

【解析】依题意，点M,N分别在C的左、右支上，结合图形可知，$MN/\!/OF_1$，$|MF_1|=|OF_1|$，结合双曲线对称性可知，$x_M=-\frac{c}{2}$，$x_N=\frac{c}{2}$，$\triangle OMF_1$为等边三角形，不妨设M在第二象限，则$M\left(-\frac{c}{2},\frac{\sqrt{3}c}{2}\right)$，代入$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$中，得$\frac{c^2}{4a^2}-\frac{3c^2}{4b^2}=1$，故$\frac{b^2}{a^2}=3+2\sqrt{3}$，则$e=\frac{c}{a}=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{3}+1$，故选 B.

12.【答案】B

【解析】依题意，$h(x)=(1-b)x-e^x-\sin x+1$，则$g(x)=h'(x)=-e^x-\cos x+1-b$，而$g'(x)=-e^x+\sin x$，故当$x\in[0,+\infty)$时，$g'(x)\leqslant -1+\sin x\leqslant 0$，$h'(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减，当$b\geqslant -1$时，$h'(x)\leqslant h'(0)=-1-b\leqslant 0$，故$h(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减，故$h(x)\leqslant h(0)=0$；当$b<-1$时，因为$h'(x)$在$[0,+\infty)$上单调递减，$h'(0)=-1-b>0$，且当$x\to+\infty$时，$h'(x)\to-\infty$，故$\exists x_0\in(0,+\infty)$，$h'(x_0)=0$，且当$x\in(0,x_0)$时，$h'(x)>0$，$h(x)$在$(0,x_0)$上单调递增，故$h(x_0)>h(0)=0$，这与题设矛盾，舍去. 综上所述，实数$b$的取值范围为$[-1,+\infty)$，故选 B.

13.【答案】$-\frac{13}{4}$

【解析】依题意，$2\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b}=(6,-4)+(2k,-k)=(6+2k,-4-k)$，而$(2\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})\perp\boldsymbol{a}$，故$(2\boldsymbol{a}+k\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{a}=0$，故$3(6+2k)+2(4+k)=0$，解得$k=-\frac{13}{4}$.

14.【答案】$\frac{16}{3}$

【解析】依题意，$X\sim B(8,p)$，故$8p(1-p)=\frac{16}{9}$，解得$p=\frac{1}{3}$或$p=\frac{2}{3}$，而$E(X)=8p>4$，故$p=\frac{2}{3}$，

则 $E(X)=8\times\frac{2}{3}=\frac{16}{3}$.

15.【答案】$45°\left(或填\frac{\pi}{4}\right)$

【解析】设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $y_1^2=6x_1$,$y_2^2=6x_2$,两式相减可得,$(y_1-y_2)(y_1+y_2)=6(x_1-x_2)$,则 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\cdot(y_1+y_2)=k_{AB}\cdot 6=6$,故 l 的斜率为 1,则 l 的倾斜角为 $45°$.

16.【答案】675

【解析】依题意,$a_{n+2}=a_n+1+(-1)^{\sin\frac{(n+1)\pi}{2}}$. 当 n 为奇数时,$a_{n+2}-a_n=2$,故数列 $\{a_{2n-1}\}$ 是首项为 1,公差为 2 的等差数列;当 n 为偶数时,$a_{n+2}-a_n=0$,故数列 $\{a_{2n}\}$ 为常数列,故 $S_{50}=(a_1+a_3+\cdots+a_{49})+(a_2+a_4+\cdots+a_{50})=25+\frac{25\times 24}{2}\times 2+2\times 25=675$.

17. 解:(1) 依题意,$2\sqrt{3}\cdot\frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}+\frac{1}{\cos^2\frac{C}{2}}=2$,(1 分)

故 $2\sqrt{3}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}=2\cos^2\frac{C}{2}-1$,(3 分)

即 $\sqrt{3}\sin C=\cos C$,(4 分)

故 $\tan C=\frac{\sqrt{3}}{3}$,(5 分)

因为 $C\in(0,\pi)$,故 $C=\frac{\pi}{6}$.(6 分)

(2) 若选①:

依题意,$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=36\sin A$,(7 分)

解得 $bc=72$,故 $b=12$,(8 分)

由余弦定理,$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,(9 分)

即 $36=a^2+144-12\sqrt{3}a$,解得 $a=6\sqrt{3}$,(11 分)

故 $\triangle ABC$ 的周长为 $18+6\sqrt{3}$.(12 分)

若选②:

依题意,$2a\cos C+2c\cos A=\frac{\sqrt{3}b^2}{a}$,故 $2a^2\cos C+2ac\cos A=\sqrt{3}b^2$,(7 分)

故 $2a(\sin A\cos C+\sin C\cos A)=\sqrt{3}b\sin B$,(8 分)

即 $2a\sin(A+C)=2a\sin B=\sqrt{3}b\sin B$,(9 分)

因为 $\sin B\neq 0$,所以 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}b$,(10 分)

由余弦定理,$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$,则 $36=\frac{3}{4}b^2+b^2-\frac{3}{2}b^2$,解得 $b=12$,(11 分)

则 $a=\frac{\sqrt{3}}{2}b=6\sqrt{3}$,故 $\triangle ABC$ 的周长为 $18+6\sqrt{3}$.(12 分)

若选③：

因为$\overrightarrow{AB}\cdot(\overrightarrow{BC}-\overrightarrow{BA})=\frac{bc}{2}$，即$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{bc}{2}$，(7 分)

故 $2bc\cos A=bc$，故 $\cos A=\frac{1}{2}$，(8 分)

因为 $A\in(0,\pi)$，故 $A=\frac{\pi}{3}$，(9 分)

故 $B=\pi-A-C=\frac{\pi}{2}$，(10 分)

所以 $b=2c=12$，$a=\sqrt{3}c=6\sqrt{3}$，(11 分)

所以$\triangle ABC$的周长为 $18+6\sqrt{3}$. (12 分)

18. 解：(1) $x=\frac{1+3+5+7+9+11+13+15}{8}=8$，(1 分)

$y=\frac{24+23+22+20+19+19+17+16}{8}=20$，(2 分)

故$\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-x)^2=(49+25+9+1)\times 2=168$，(3 分)

$\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-x)(y_i-y)=-96$，(4 分)

故 $b=\frac{\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-x)(y_i-y)}{\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-x)^2}=\frac{-96}{168}=-\frac{4}{7}$，(5 分)

故 $\hat{a}=y-bx=20+\frac{4}{7}\times 8=\frac{172}{7}$，故所求回归直线方程为 $\hat{y}=-\frac{4}{7}x+\frac{172}{7}$. (6 分)

(2)①依题意，$\sum\limits_{i=1}^{8}(y_i-y)^2=16+9+4+1+1+9+16=56$，(7 分)

故 $r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-x)(y_i-y)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-x)^2\sum\limits_{i=1}^{8}(y_i-y)^2}}=\frac{-96}{56\sqrt{3}}\approx -0.96$. (9 分)

②相关系数 r 是衡量模型好坏的标准，相关系数的绝对值越接近于 1，模型的拟合性就越强，因为$|r|>|r'|$，故模型一相比模型二具有更好的拟合效果. (12 分)

19. (1)证明：取 CB_1 的中点 P，连接 PN，A_1P，

则 $NP/\!/BB_1/\!/AA_1$，且 $NP=\frac{1}{2}AA_1=A_1M$，(1 分)

所以四边形 A_1MNP 为平行四边形，所以 $MN/\!/A_1P$；(3 分)

因为直线 $l\perp$平面 CA_1B_1，$A_1P\subset$平面 CA_1B_1，故 $l\perp A_1P$，故 $l\perp MN$. (4 分)

(2)解：连接 OC，因为 $OO_1\perp$平面 ABC，则 $OO_1\perp OB$，$OO_1\perp OC$，AB 是圆柱底面的直径，C 是弧 AB 的中点，所以 $CA=CB$，O 为 AB 的中点，则 $OC\perp OB$.

以 O 为原点，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OO_1}$分别为 x,y,z 轴的正方向建立如图所示的空间直角坐标系 $O-xyz$，(5 分)

设 $OB=1$，则 $B(1,0,0)$，$C(0,1,0)$，$A_1(-1,0,2)$，$B_1(1,0,2)$，(6 分)

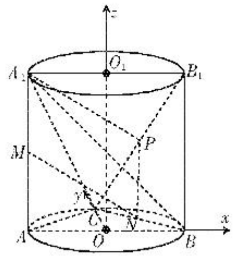
$\overrightarrow{A_1B}=(2,0,-2)$，$\overrightarrow{A_1C}=(1,1,-2)$.

设平面 A_1BC 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(x_1,y_1,z_1)$，则

$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1B}=0\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{A_1C}=0\end{cases}$，得 $\begin{cases}2x_1-2z_1=0\\ x_1+y_1-2z_1=0\end{cases}$，

取 $x_1=1$，则 $y_1=1$，$z_1=1$，则 $\boldsymbol{n}=(1,1,1)$，(9 分)

而 $\overrightarrow{CB_1}=(1,-1,2)$，(10 分)



故直线 CB_1 与平面 A_1BC 所成角的正弦值 $\sin\theta=\dfrac{|\overrightarrow{CB_1}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{CB_1}||\boldsymbol{n}|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}\times\sqrt{6}}$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$. (12 分)

20. 解：(1) 依题意，$f'(x)=2m\ln x+2m-\dfrac{1}{x^2}$，故 $f'(1)=2m-1$，(2 分)

又 $f'(1)\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)=(2m-1)\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\right)=-1$，解得 $m=2$. (4 分)

(2) 因为 $x_1x_2=1$，不妨设 $x_1>1>x_2>0$，

由 $x_2f(x_1)=x_1f(x_2)$ 得，$2m\ln x_1+\dfrac{x_2}{x_1}=2m\ln x_2+\dfrac{x_1}{x_2}$，(5 分)

故 $2m\ln\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{x_1}{x_2}-\dfrac{x_2}{x_1}$，故 $m>0$，(7 分)

设 $t=\dfrac{x_1}{x_2}>1$，则 $2m\ln t=t-\dfrac{1}{t}$，令 $g(t)=t-\dfrac{1}{t}-2m\ln t$，(8 分)

因为 $g(1)=0$，由题意可知，$y=g(t)$ 在区间 $(1,+\infty)$ 上有零点，

而 $g'(t)=\dfrac{t^2-2mt+1}{t^2}$，(9 分)

设 $g'(t)=0$ 的两根为 t_1,t_2，由 $t^2-2mt+1=0$，得 $t_1t_2=1$，

故 $g'(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 上有零点，则 $g'(1)=2-2m<0$，(11 分)

解得 $m>1$，故实数 m 的取值范围为 $(1,+\infty)$. (12 分)

21. 解：(1) 依题意，$\begin{cases}\dfrac{2}{a^2}+\dfrac{3}{2b^2}=1,\\ a^2+b^2=7,\end{cases}$ (2 分)

解得 $a^2=4\left(a^2=\dfrac{7}{2}\text{舍去}\right)$，故 $b^2=3$，

故 C 的方程为 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$. (4 分)

(2) 设直线 $PQ: y=kx+m$，$P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$，

因为原点 O 恰好是 $\triangle PQR$ 的重心，所以 $R(-x_1-x_2,-y_1-y_2)$，(5 分)

所以 $\dfrac{x_1^2}{4}+\dfrac{y_1^2}{3}=\dfrac{x_2^2}{4}+\dfrac{y_2^2}{3}=\dfrac{(x_1+x_2)^2}{4}+\dfrac{(y_1+y_2)^2}{3}=1$，(6 分)

即 $3x_1x_2+4y_1y_2=-6$，即 $3x_1x_2+4(kx_1+m)(kx_2+m)=-6$，(7 分)

故 $(4k^2+3)x_1x_2+4mk(x_1+x_2)+4m^2+6=0$，(8 分)

联立$\begin{cases} y=kx+m, \\ 3x^2+4y^2=12, \end{cases}$则$(4k^2+3)x^2+8mkx+4m^2-12=0$,(9 分)

故$\Delta=48(4k^2+3-m^2)>0$,$x_1+x_2=-\dfrac{8km}{4k^2+3}$,$x_1x_2=\dfrac{4m^2-12}{4k^2+3}$,(10 分)

代入$(4k^2+3)x_1x_2+4mk(x_1+x_2)+4m^2+6=0$中可得,$4m^2=4k^2+3$,①

设 O 到 PQ 的距离为 d,则 $d=\dfrac{|m|}{\sqrt{k^2+1}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$,②

由①②解得 $k=\pm\dfrac{1}{2}$,故 PQ 的斜率为$\pm\dfrac{1}{2}$.(12 分)

22. 解:(1)l 的普通方程为 $x-y-1=0$,(2 分)

C 可化为 $\rho=2\cos\theta+2\sin\theta$,(3 分)

即 $\rho^2=2\rho\cos\theta+2\rho\sin\theta$,故 $x^2+y^2-2x-2y=0$,

即 C 的直角坐标方程为$(x-1)^2+(y-1)^2=2$.(5 分)

(2)对于 C,由(1)可知,$\cos\theta+\sin\theta=\dfrac{\rho}{2}$,

因为 l 的极坐标方程为 $\rho(\cos\theta-\sin\theta)=1$,得 $\cos\theta-\sin\theta=\dfrac{1}{\rho}$,(6 分)

两式的平方和为$\dfrac{\rho^2}{4}+\dfrac{1}{\rho^2}=2$,整理得 $\rho^4-8\rho^2+4=0$,(7 分)

设 M,N 两点所对应的极径分别为 ρ_1,ρ_2,

则 $\rho_1^2+\rho_2^2=8$,$(\rho_1\rho_2)^2=4$,$\rho_1\rho_2=2$,(8 分)

所以$(\rho_1+\rho_2)^2=\rho_1^2+\rho_2^2+2\rho_1\rho_2=12$,故 $\rho_1+\rho_2=2\sqrt{3}$,(9 分)

故$\dfrac{1}{|OM|}+\dfrac{1}{|ON|}=\dfrac{1}{\rho_1}+\dfrac{1}{\rho_2}=\dfrac{\rho_1+\rho_2}{\rho_1\rho_2}=\dfrac{2\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}$.(10 分)

23. 解:(1)依题意,$|x-1|+|x+4|<8$,

当 $x<-4$ 时,原式化为 $1-x-x-4<8$,解得 $x>-\dfrac{11}{2}$,故$-\dfrac{11}{2}<x<-4$;(2 分)

当$-4\leqslant x\leqslant 1$ 时,原式化为 $1-x+x+4=5<8$ 恒成立,故$-4\leqslant x\leqslant 1$;(3 分)

当 $x>1$ 时,原式化为 $x-1+x+4<8$,解得 $x<\dfrac{5}{2}$,故 $1<x<\dfrac{5}{2}$.(4 分)

故不等式 $f(x)<8$ 的解集为$\{x|-\dfrac{11}{2}<x<\dfrac{5}{2}\}$.(5 分)

(2)依题意,$f(x)_{\min}\leqslant 5$,(6 分)

而$\left|x-\dfrac{4}{m}\right|+|x+m|\geqslant\left|x-\dfrac{4}{m}-x-m\right|=m+\dfrac{4}{m}$,故 $m+\dfrac{4}{m}\leqslant 5$,(8 分)

故 $m^2-5m+4\leqslant 0$,即 $1\leqslant m\leqslant 4$,故 m 的取值范围为$[1,4]$.(10 分)

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。