长郡中学 2022—2023 学年度高一第一学期第一次适应性检测

数学参考答案

一、选择题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每个小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求.)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8
答案	B	B	D	C	A	B	D	A

1.B 【解析】由题可得 $\complement_U B=\{1,5,6\}$,所以 $A\cap(\complement_U B)=\{1,6\}$.故选 B.

2.B 【解析】存在量词命题的否定是全称量词命题,所以“$\exists a>0$,有 $a+\frac{1}{a}<2$ 成立”的否定是“$\forall a>0$,有 $a+\frac{1}{a}\geqslant 2$ 成立”,故选 B.

3.D 【解析】设幂数的解析式为 $y=x^{\alpha}$,将点$(3,\sqrt{3})$的坐标代入解析式得 $3^{\alpha}=\sqrt{3}$,解得 $\alpha=\frac{1}{2}$,$\therefore y=x^{\frac{1}{2}}$,函数的定义域为$[0,+\infty)$,是非奇非偶函数,且在$(0,+\infty)$上是增函数,故选 D.

4.C 【解析】(特值法)取 $a=-2,b=-1,n=0$,逐个检验,可知 A,B,D 项均不正确;

C 项,$\frac{|b|}{|a|}<\frac{|b|+1}{|a|+1}\Leftrightarrow|b|(|a|+1)<|a|(|b|+1)\Leftrightarrow|a||b|+|b|<|a||b|+|a|\Leftrightarrow|b|<|a|$,

$\because a<b<0$,$\therefore|b|<|a|$成立,故选 C.

5.A 【解析】设 $\sqrt{1-2x}=t$,则 $t\geqslant 0$,$x=\frac{1-t^2}{2}$,所以 $y=1+\frac{1-t^2}{2}-t=\frac{1}{2}(-t^2-2t+3)=-\frac{1}{2}(t+1)^2+2$,因为 $t\geqslant 0$,所以 $y\leqslant\frac{3}{2}$.

所以函数 $y=1+x-\sqrt{1-2x}$ 的值域为$\left(-\infty,\frac{3}{2}\right]$,故选 A.

6.B 【解析】$m>x^2-2x+5$,设 $f(x)=x^2-2x+5=(x-1)^2+4$,$x\in[2,4]$,当 $x=2$ 时 $f(x)_{\min}=5$,$\exists x\in[2,4]$使 $x^2-2x+5-m<0$ 成立,即 $m>f(x)_{\min}$,$\therefore m>5$.故选 B.

7.D 【解析】因为最值在 $f(0)=b$,$f(1)=1+a+b$,$f\left(-\frac{a}{2}\right)=b-\frac{a^2}{4}$ 中取,所以最值之差一定与 b 无关,选 D.

8.A 【解析】由“隐对称点”的定义可知,

$f(x)=\begin{cases}x^2+2x,x<0,\\mx+2,x\geqslant 0\end{cases}$ 的图象上存在点关于原点对称,

设函数 $g(x)$的图象与函数 $y=x^2+2x$,$x<0$ 的图象关于原点对称,

设 $x>0$,则$-x<0$,$f(-x)=(-x)^2+2(-x)=x^2-2x$,

$\therefore g(x)=-x^2+2x$,$x>0$,

故原题意等价于方程 $mx+2=-x^2+2x(x>0)$有零点,

解得 $m=-x-\frac{2}{x}+2$,

由于$-x-\frac{2}{x}+2=-\left(x+\frac{2}{x}\right)+2\leqslant-2\sqrt{x\cdot\frac{2}{x}}+2=2-2\sqrt{2}$,

当且仅当 $x=\sqrt{2}$时,取得等号,即有 $m\leqslant 2-2\sqrt{2}$,

即实数 m 的取值范围是$(-\infty,2-2\sqrt{2}]$.故选 A.

二、选择题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.在每小题给出的选项中,有多项符合要求.全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.)

题号	9	10	11	12
答案	CD	ACD	ABD	ABC

9.CD 【解析】A 错误,当 $a=0,b=0,c<0$ 时,满足 $b^2-4ac\leqslant 0$,但此时 $ax^2+bx+c\geqslant 0$ 不成立,故若 $a,b,c\in\mathbf{R}$,则“$ax^2+bx+c\geqslant 0$”的充要条件是“$b^2-4ac\leqslant 0$”错误;

B 错误,若 $a,b,c\in\mathbf{R}$,当 $a>c$ 且 $b=0$ 时,推不出 $ab^2>cb^2$,故错误;

C 正确,若方程 $x^2+x+a=0$ 有一个正根和一个负根,则 $\Delta=1-4a>0$,$x_1x_2=a<0$,则 $a<0$,又“$a<1$”是“$a<0$”的必要不充分条件,故正确;

D 正确,“$a>1$”$\Rightarrow$“$\frac{1}{a}<1$”但是“$\frac{1}{a}<1$”推不出“$a>1$”,故正确.故选 CD.

10. ACD 【解析】正实数 a,b 满足 $a+b=1$，即有 $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$，

可得 $0<ab\leqslant\frac{1}{4}$，

即有 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{ab}\geqslant 4$，

即当 $a=b$ 时，$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ 取得最小值 4，无最大值；

由 $0<\sqrt{ab}\leqslant\frac{1}{2}$，可得 $\sqrt{ab}$ 有最大值 $\frac{1}{2}$，B 错误；

由 $\sqrt{a}+\sqrt{b}=\sqrt{a+b+2\sqrt{ab}}=\sqrt{1+2\sqrt{ab}}\leqslant\sqrt{1+2\cdot\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$，

可得当 $a=b$ 时，$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 取得最大值 $\sqrt{2}$；

由 $a^2+b^2\geqslant 2ab$ 可得 $2(a^2+b^2)\geqslant(a+b)^2=1$，

则 $a^2+b^2\geqslant\frac{1}{2}$，故当 $a=b=\frac{1}{2}$ 时，a^2+b^2 取得最小值 $\frac{1}{2}$.

综上可得 ACD 均正确.

11. ABD 【解析】令 $x=y=0$，则 $f(0)=2f(0)$，故 $f(0)=0$，选项 A 正确；

令 $y=-x$，则 $f(0)=f(x)+f(-x)=0$，

即 $f(x)=-f(-x)$，

故函数 $f(x)$ 为奇函数，选项 B 正确；

设 $x_1<x_2$，则 $x_1-x_2<0$，

由题意可得，$f(x_1-x_2)>0$，

即 $f(x_1)+f(-x_2)=f(x_1)-f(x_2)>0$，

即 $f(x_1)>f(x_2)$，故函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数，

$\therefore f(x)$ 在 $[m,n]$ 上的最大值为 $f(m)$，选项 C 错误；

$f(x-1)>0$ 等价于 $f(x-1)>f(0)$，

又 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数，故 $x-1<0$，

解得 $x<1$，选项 D 正确.

故选 ABD.

12. ABC 【解析】因为函数 $f(x)$ 为奇函数，$f(x+1)$ 为偶函数，所以 $f(-x)=-f(x)$，$f(x+1)=f(1-x)$，

所以 $f(x+2)=f(-x)=-f(x)$，$f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，所以 $f(x)$ 的周期为 4，

又 $\because f(1)=0$，$f(3)=f(-1)=-f(1)=0$，$f(5)=f(1)=0$，故 A，B 正确；

$f(x+3)=f(x+3-4)=f(x-1)$，$\therefore$C 正确；

$f(2)=f(2-4)=f(-2)$，同时根据奇函数的性质得 $f(2)=-f(-2)$，$\therefore f(2)$，$f(-2)$ 既相等又互为相反数，故 $f(2)=0$，

所以 $f(2)+f(1)=0\neq 1$，即 $f(x+2)+f(x+1)=1$ 对于 $x=0$ 不成立，故 D 不正确. 故选 ABC.

三、填空题（本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.）

13. 8

14. $[6,+\infty)$ 【解析】$\because f(x)=\sqrt{x^2-5x-6}$，$\therefore x^2-5x-6\geqslant 0$，求得 $x\leqslant -1$，或 $x\geqslant 6$，

故函数的定义域为 $\{x|x\leqslant -1$ 或 $x\geqslant 6\}$，

由题即求函数 $y=x^2-5x-6$ 在定义域内的增区间.

由二次函数的性质可得函数 $y=x^2-5x-6$ 在定义域内的增区间为 $[6,+\infty)$.

15. $2+2\sqrt{2}$ 【解析】$\because a+b+c=2$，$a+b=2-c>0$，

$\therefore\frac{4}{a+b}+\frac{a+b}{c}=\frac{4}{2-c}+\frac{2-c}{c}=\frac{4}{2-c}+\frac{2}{c}-1$，

设 $\begin{cases}2-c=m,\\c=n,\end{cases}$ 则 $m+n=2$，

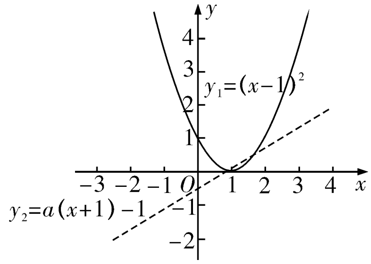
$\therefore\frac{4}{2-c}+\frac{2}{c}=\frac{4}{m}+\frac{2}{n}=\frac{m+n}{2}\times\left(\frac{4}{m}+\frac{2}{n}\right)=3+\frac{2n}{m}+\frac{m}{n}\geqslant 3+2\sqrt{\frac{2n}{m}\times\frac{m}{n}}=3+2\sqrt{2}$，

当且仅当 $m^2=2n^2$，即 $c=2\sqrt{2}-2$ 时，等号成立，

$\therefore\frac{4}{2-c}+\frac{2}{c}-1\geqslant 3+2\sqrt{2}-1=2+2\sqrt{2}$，

即 $\frac{4}{a+b}+\frac{a+b}{c}$ 的最小值为 $2+2\sqrt{2}$.

16. $\left(\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right]$ 【解析】$f(x)=x^2-(a+2)x+2-a<0$,



即 $x^2-2x+1<a(x+1)-1$,

分别令 $y_1=x^2-2x+1$, $y_2=a(x+1)-1$,易知 y_2 过定点$(-1,-1)$,

在同一坐标系中画出两个函数的图象,如图所示,

若集合 $A=\{x\in\mathbf{Z}|f(x)<0\}$中有且只有一个元素,结合图象可得,即点$(0,1)$和点$(2,1)$在直线上或者在直线上方,点$(1,0)$在直线下方,

$\therefore\begin{cases}a-1\leqslant 1,\\2a-1>0,\\3a-1\leqslant 1,\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{2}<a\leqslant\frac{2}{3}$.

四、解答题(本题共 6 小题,共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17.【解析】(1)由 $\frac{x-3}{x+1}<0$,得 $P=\{x|-1<x<3\}$. ……………… 4 分

(2)$Q=\{x||x-1|\leqslant 1\}=\{x|0\leqslant x\leqslant 2\}$. ……………… 7 分

由 $a>0$,得 $P=\{x|-1<x<a\}$,又 $Q\subseteq P$,所以 $a>2$,

即 a 的取值范围是$(2,+\infty)$. ……………… 10 分

18.【解析】(1)设 $f(x)$的解析式为 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$.

$\because f(0)=1$, $\therefore c=1$.

把 $f(x)$的表达式代入 $f(x+1)-f(x)=2x$,有

$a(x+1)^2+b(x+1)+1-(ax^2+bx+1)=2x$.

$\therefore 2ax+a+b=2x$. $\therefore 2a=2$, $a+b=0$.

$\therefore a=1$, $b=-1$.

$\therefore f(x)=x^2-x+1$. ……………… 6 分

(2)由 $x^2-x+1>2x+5$,得 $x^2-3x-4>0$,解得 $x>4$ 或 $x<-1$.

故原不等式的解集为$\{x|x>4$ 或 $x<-1\}$. ……………… 12 分

19.【解析】(1)$\because a+b=ab\leqslant\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$,

$\therefore a+b\geqslant 4$(当且仅当 $a=b$ 时取等号). ……………… 6 分

(2)$\because a+b=ab\geqslant 2\sqrt{ab}$,

$\therefore ab\geqslant 4$, ……………… 8 分

$\therefore\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab}=1+\frac{a+b}{ab}+\frac{1}{ab}=2+\frac{1}{ab}\leqslant 2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$. ……………… 12 分

20.【解析】(1)由于函数 $f(x)=\frac{x+b}{x^2-1}$是定义在$(-1,1)$上的奇函数,则 $f(-x)=-f(x)$,

即 $\frac{-x+b}{(-x)^2+1}=-\frac{x+b}{x^2+1}$,化简得 $b=0$,因此,$f(x)=\frac{x}{x^2-1}$. ……………… 4 分

(2)任取 $x_1,x_2\in(-1,1)$,且 $x_1<x_2$,即$-1<x_1<x_2<1$,

则 $f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{x_1^2-1}-\frac{x_2}{x_2^2-1}=\frac{x_1(x_2^2-1)-x_2(x_1^2-1)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}=\frac{(x_2-x_1)(x_1x_2+1)}{(x_1-1)(x_1+1)(x_2-1)(x_2+1)}$,

$\because -1<x_1<x_2<1$, $\therefore x_2-x_1>0$, $x_1x_2+1>0$, $x_1-1<0$, $x_1+1>0$, $x_2-1<0$, $x_2+1>0$.

$\therefore f(x_1)-f(x_2)>0$, $\therefore f(x_1)>f(x_2)$,因此,函数 $y=f(x)$在区间$(-1,1)$上是减函数. ……………… 8 分

(3)由(2)可知,函数 $y=f(x)$是定义在$(-1,1)$的减函数,且为奇函数,

由 $f(t-1)+f(t)<0$ 得 $f(t-1)<-f(t)=f(-t)$,所以$\begin{cases}t-1>-t,\\-1<t-1<1,\\-1<t<1,\end{cases}$ 解得 $\frac{1}{2}<t<1$.

因此,不等式 $f(t-1)+f(t)<0$ 的解集为$\left(\frac{1}{2},1\right)$. ……………… 12 分

21.【解析】(1)当 $9\leqslant t\leqslant 15$ 时,$1\,800\geqslant 1\,500$,不满足题意,舍去.

当 $4\leqslant t<9$ 时,$1\,800-15(9-t)^2\leqslant 1\,500$,

即 $t^2-18t+61\geqslant 0$,

解得 $t\geqslant 9+2\sqrt{5}$(舍)或 $t\leqslant 9-2\sqrt{5}$,

$\because 4\leqslant t<9$, $t\in\mathbf{N}$.

$\therefore t=4$. ……………… 6 分

(2)由题意可得 $Q=\begin{cases}-\left(90t+\dfrac{4\ 410}{t}\right)+1\ 520,4\leqslant t<9,t\in\mathbf{N},\\ \dfrac{2\ 880}{t}-100,9\leqslant t\leqslant 15,t\in\mathbf{N},\end{cases}$

当 $4\leqslant t<9$ 时,$Q\leqslant -2\sqrt{90\times 4\ 410}+1\ 520=260$(元)(当且仅当 $90t=\dfrac{4\ 410}{t}$,即 $t=7$ 时等号成立),

当 $9\leqslant t\leqslant 15$ 时,$Q\leqslant\dfrac{2\ 880}{9}-100=220$(元)(当 $t=9$ 时取得最大值).

答:(1)若平均每趟地铁的载客人数不超过 1 500,则发车时间间隔为 4 min.

(2)当发车时间间隔为 7 min 时,平均每趟地铁每分钟的净收益最大,最大净收益为 260 元. ………………………………… 12 分

22.【解析】(1)$y=x^2\geqslant 0$,$y=x^2$ 在$[0,+\infty)$上单调递增,由 $x^2=x$ 得 $x=0$ 或 1,存在优美区间是$[0,1]$;

$y=3-\dfrac{4}{x}(x>0)$是增函数,若存在优美区间$[m,n]$,则$\begin{cases}3-\dfrac{4}{m}=m,\\ 3-\dfrac{4}{n}=n,\end{cases}$无解,不合题意,因此,不存在优美区间. ……………… 5 分

(2)$f(x)=\dfrac{(a^2+a)x-1}{a^2x}=1+\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^2x}$在$(-\infty,0)$和$(0,+\infty)$上都是增函数,

因此优美区间$[m,n]\subseteq(-\infty,0)$或$[m,n]\subseteq(0,+\infty)$,

由题意$\begin{cases}f(m)=m,\\ f(n)=n,\end{cases}$所以 $f(x)=x$ 有两个同号的不等实根,

$f(x)=1+\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{a^2x}=x$,$a^2x^2-(a^2+a)x+1=0$,

$\Delta=(a^2+a)^2-4a^2>0$,$a^2(a+3)(a-1)>0$,解得 $a<-3$ 或 $a>1$,

$x_1x_2=\dfrac{1}{a^2}>0$,x_1,x_2 同号,满足题意,

$x_1+x_2=\dfrac{a^2+a}{a^2}=\dfrac{a+1}{a}$,

$n-m=|x_1-x_2|=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}=\sqrt{\dfrac{(a+1)^2}{a^2}-\dfrac{4}{a^2}}=\sqrt{-\dfrac{3}{a^2}+\dfrac{2}{a}+1}$

$=\sqrt{-3\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{4}{3}}$,

因为 $a<-3$ 或 $a>1$,所以当$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{3}$,即 $a=3$ 时,$(n-m)_{\max}=\sqrt{\dfrac{4}{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$. ………………………………………………………… 12 分