新高考版

2023—2024 学年度上学期高三年级一调考试

数　学

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分。共 4 页,总分 150 分,考试时间 120 分钟。

第Ⅰ卷(选择题　共 60 分)

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 集合$\{x\mid -3<2x-1\leqslant 3,x\in\mathbf{Z}\}=$

A. $(-1,2]$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{0,1,2\}$　　D. $\{-2,-1,0,1,2\}$

2. 已知$\frac{2}{3}<m<1$,则复数$m(3+\mathrm{i})-(2-\mathrm{i})$在复平面内对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限　　C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 若非零向量$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{AC}$满足$\left(\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}+\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\right)\cdot\overrightarrow{BC}=0$,且$\frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,则$\triangle ABC$为

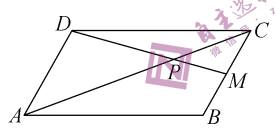
A. 三边均不相等的三角形　　B. 直角三角形

C. 底边和腰不相等的等腰三角形　　D. 等边三角形

4. “$a>b$”的一个充分条件是

A. $\mathrm{e}^{a-b}>2$　　B. $\ln\frac{a}{b}>0$　　C. $a^a>b^b$　　D. $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$

5. 如图,在平行四边形$ABCD$中,M为BC中点,AC与MD相交于点P,若$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$,则$x+y=$



A. 1　　B. $\frac{4}{3}$

C. $\frac{5}{3}$　　D. 2

6. 已知α为第三象限角,$\sin(2\,019\pi-\alpha)=-\frac{\sqrt{5}}{3}$,则$\sin 2\alpha+\cos^2\alpha+1=$

A. $\frac{4\sqrt{5}+13}{9}$　　B. $\sqrt{2}$　　C. $-\frac{\sqrt{5}}{4}$　　D. $-\frac{13}{9}$

7. 已知$f(x)=x^2+|x+1|$,不等式$f(x)\geqslant(m+2)x-1$恒成立,则实数m的取值范围是

A. $[-3-2\sqrt{2},0]$　　B. $[-3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}]$

C. $[-2\sqrt{2}-1,2\sqrt{2}-1]$　　D. $[-4,2\sqrt{2}-1]$

8. 已知在等差数列$\{a_n\}$中,$a_5=\frac{3\pi}{8}$,设函数$f(x)=\left(4\cos^2\frac{x}{2}-2\right)\sin x+\cos 2x+2$,记$y_n=f(a_n)$,则数列$\{y_n\}$的前 9 项和为

A. 0　　B. 10　　C. 16　　D. 18

二、选择题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分。

9. 已知复数$z,z_1,z_2,\bar{z}$是z的共轭复数,则下列说法正确的是

A. $z\cdot\bar{z}=|z|^2$　　B. 若$|z|=1$,则$z=\pm1$

C. $|z_1\cdot z_2|=|z_1||z_2|$　　D. 若$|z-1|=1$,则$|z+1|$的最小值为 1

10. 已知G是$\triangle ABC$的重心,$AB=2$,$AC=4$,$\angle CAB=120^\circ$,P是$\triangle ABC$所在平面内的一点,则下列结论正确的是

A. $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\mathbf{0}$　　B. $\overrightarrow{AC}$在$\overrightarrow{AB}$方向上的投影向量等于$\overrightarrow{AB}$

C. $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB}=\frac{4}{3}$　　D. $\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP})$的最小值为$-\frac{3}{2}$

11. 已知函数$f(x)=2\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\pi)$的图象的一条对称轴为直线$x=\frac{2\pi}{3}$,$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$,且$f(x)$在区间$\left(\frac{\pi}{4},\frac{2\pi}{3}\right)$上单调递减,则下列说法正确的是

A. 点$\left(-\frac{7\pi}{12},0\right)$是$f(x)$的一个对称中心　　B. $\omega=\frac{14}{5}$

C. $f(x)$在区间$\left(-\frac{5\pi}{12},0\right)$上单调递增　　D. $f\left(-\frac{\pi}{6}\right)=-1$

12. 若$a>1,b>1$,且$ab=\mathrm{e}^2$,则

A. $2\mathrm{e}\leqslant a+b<\mathrm{e}^2+1$　　B. $0<\ln a\cdot\ln b\leqslant 1$

C. $2\sqrt{2}-1\leqslant\ln a+\log_a b<2$　　D. $a^{\ln b}$的最大值为 e

第Ⅱ卷(非选择题　共 90 分)

三、填空题:本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分。

13. 已知平面向量$\boldsymbol{a}=(-2,4)$,$\boldsymbol{b}=(-3,1)$,若$\boldsymbol{a}-\lambda\boldsymbol{b}$与$\boldsymbol{b}$垂直,则实数$\lambda=$________.

14. 已知$x,y,z\in\mathbf{R}$,$x^2+y^2+z^2=2$,则$x+2y+2z$的最大值为________.

15. 已知关于x的方程$ax^2-2|x|+a=0$有 4 个不同的实数解,则实数a的取值范围是________.

16. 已知正项数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,若$2a_nS_n=1+a_n^2$,$b_n=\log_2\frac{S_{n+2}}{S_n}$,数列$\{b_n\}$的前$n$项和为$T_n$,则下列结论正确的是________.

①$a_n<a_{n+1}$;②$\{S_n^2\}$是等差数列;③$S_n\leqslant\mathrm{e}^{\sqrt{n}-1}$;④满足$T_n\geqslant3$的$n$的最小正整数为 10.

四、解答题:本题共 6 小题,共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,且满足$a_1+a_3+a_5=15$,$S_7=49$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式;

(2)若数列$\{b_n\}$满足$b_n=a_n\cdot3^n$,求$\{b_n\}$的前n项和T_n.

班级

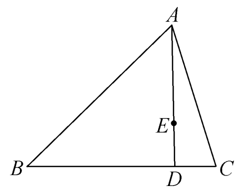
姓名

得分

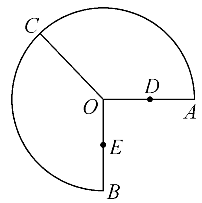
18. （12 分）

（1）如图①，在$\triangle ABC$中，AD为BC边上的高，$\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{ED}$，$\angle BAC=\frac{\pi}{3}$，$AB=3$，$AC=2$，求$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CE}$的值；

（2）如图②，半径为 1，圆心角为$\frac{3\pi}{2}$的圆弧AB上有一点C，若D，E分别为线段OA，OB的中点，当C在圆弧AB上运动时，求$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DE}$的取值范围.



①



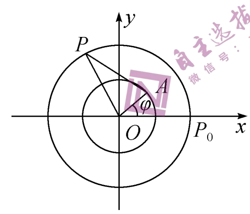
②

19. （12 分）

如图，在平面直角坐标系xOy中，角φ的终边与单位圆的交点为A，圆C：$x^2+y^2=3$与x轴正半轴的交点是P_0. 若圆C上一动点从P_0开始，以π rad/s 的角速度逆时针做圆周运动，t秒后到达点P. 设$f(t)=|AP|^2$.

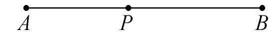
（1）若$\varphi=\frac{\pi}{3}$且$t\in(0,2)$，求函数$f(t)$的单调递增区间；

（2）若$f\left(\frac{1}{3}\right)=2$，$\frac{\pi}{3}<\varphi<\frac{5\pi}{6}$，求$f\left(\frac{5}{6}\right)$.



20. （12 分）

某城市受空气污染影响严重，现欲在该城市中心P的两侧建造A，B两个空气净化站（如图，A，P，B三点共线），A，B两站对该城市的净化度分别为a，$1-a$，其中$a\in(0,1)$. 已知对该城市总净化效果为A，B两站对该城市的净化效果之和，且每站净化效果与净化度成正比，与中心P到净化站之间的距离成反比. 现已知$AB=1$，且当$AP=\frac{3}{4}$时，A站对该城市的净化效果为$\frac{2a}{3}$，B站对该城市的净化效果为$1-a$.



（1）设$AP=x$，$x\in(0,1)$，求A，B两站对该城市的总净化效果y；

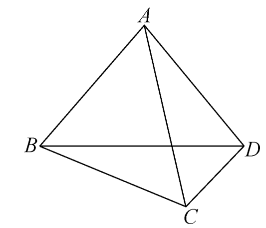
（2）无论A，B两站建在何处，若要求A，B两站对该城市的总净化效果至少达到$\frac{2}{3}$，求a的取值范围.

21. （12 分）

如图，已知在平面四边形$ABCD$中，$AB\perp AD$，$BC\perp CD$. 在$\triangle ABC$中，内角A，B，C的对边分别为a，b，c，且________. 在①$b\cos\left(\frac{\pi}{2}-C\right)=\sqrt{3}c\cos B$；②$2S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}\,\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$；③$\tan A+\tan C+\sqrt{3}=\sqrt{3}\tan A\tan C$这三个条件中任选一个，补充在上面的横线中，并回答下列问题.

（1）求B；

（2）若$BD=2$，求$\triangle ACD$周长的取值范围.



22. （12 分）

已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=0$，且$\frac{a_{n+1}+a_n+2}{a_na_{n+1}+a_{n+1}}=-2$. 数列$\{b_n\}$满足$b_n=\frac{1}{a_n+1}$，$\{b_n\}$的前$n$项和为$S_n$.

（1）判断数列$\{b_n\}$是否为等差数列，并求$\{a_n\}$的通项公式；

（2）设数列$\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，证明：$T_n<\frac{7}{4}$.