2023届六校第三次联考
数学试题

命题人：广州二中曾小鸿　审题人：广州二中李志军、陈景文

满分：150分。考试时间：120分钟。

注意事项：1.答题前，考生务必用黑色字迹的钢笔或签字笔将自己的姓名和考生号、考场号、座位号填写在答题卡上。并用2B铅笔将对应的信息点涂黑，不按要求填涂的，答卷无效。

2.选择题每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目选项的答案信息点涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案，答案不能答在试卷上。

3.非选择题必须用黑色字迹钢笔或签字笔作答，答案必须写在答题卡各题目指定区域内相应位置上；如需改动，先划掉原来的答案，然后再写上新的答案，不准使用铅笔和涂改液。不按以上要求作答的答案无效。

4.考生必须保持答题卡的整洁，考试结束后，只需将答题卡交回。

一、选择题：本题共8小题，每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．设全集为R，$B=\left\{x\left|\frac{1}{x}+1\geq 0\right.\right\}$，则$\complement_R B=$

A．$\{x|-1<x<0\}$　　B．$\{x|-1\leq x<0\}$

C．$\{x|-1<x\leq 0\}$　　D．$\{x|-1\leq x\leq 0\}$

2．若复数$z\cdot(1-i)=2i$，则$|z|=$

A．2　　B．$\sqrt{2}$　　C．$2\sqrt{2}$　　D．$\frac{\sqrt{2}}{2}$

3．某学校要求学生居家学习期间要坚持体育锻炼，为了解学生体育锻炼的情况，学校随机抽取了部分学生，对他们一天内的体育锻炼时长进行了统计，统计数据如下表所示：

锻炼时长（分钟）	30	40	50	60	80
学生人数	6	10	9	8	7

可以估计该学校学生一天内体育锻炼时长的众数及第40百分位数分别是

A．40，45　　B．40，40　　C．50，40　　D．40，50

4. 已知实数$a=\log_2 3, b=\cos\frac{\pi}{4}, c=\log_3 2$，则这三个数的大小关系正确的是

A. $a>b>c$

B. $b>a>c$

C. $b>c>a$

D. $a>c>b$

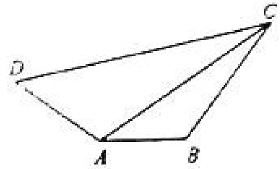
5. 在平面四边形$ABCD$中，$\angle BAD=\frac{5\pi}{6}$，$\angle BAC=\frac{\pi}{6}$，$AB=\sqrt{3}$，$AD=2$，$AC=4$. 若$\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AD}$，则$\lambda+\mu=$

A. 2

B. $2\sqrt{3}$

C. 4

D. 6



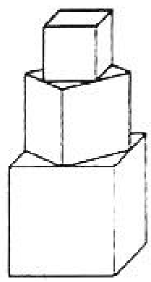
6. 有一塔形几何体由若干个正方体构成，构成方式如图所示，上层正方体下底面的四个顶点是下层正方体上底面各边的中点。已知最底层正方体的棱长为2，且该塔形的表面积（不含最底层正方体的底面面积）超过34，则该塔形中正方体的个数至少是

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7



7. 已知圆$C:(x-3)^2+(y-3)^2=2$和两点$A(m,0)$，$B(0,m)$，若圆C上存在点P，使得$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0$，则实数$m$的取值范围为

A. $[3-\sqrt{2},3+\sqrt{2}]$

B. $[2\sqrt{2},4\sqrt{2}]$

C. $[-4,-2]$

D. $[2,4]$

8. 已知$a>1$，x_1,x_2,x_3为函数$f(x)=a^x-x^2$的零点，其中$x_1<x_2<x_3$，若$x_1+x_3=2x_2$，则

A. $\frac{x_3}{x_2}<2\ln a$

B. $\frac{x_3}{x_2}=2\ln a$

C. $\frac{x_3}{x_2}>2\ln a$

D. $\frac{x_3}{x_2}$与$2\ln a$大小关系不确定

二、多选题：本题共4小题，每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，有选错的得0分，部分选对的得2分．

9．已知随机事件A、B发生的概率分别为$P(A)=0.3, P(B)=0.6$，下列说法正确的有

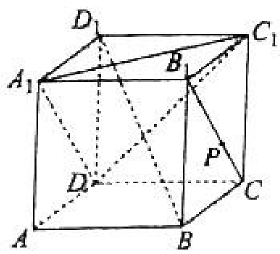
A．若$P(AB)=0.18$，则A、B相互独立

B．若A、B相互独立，则$P(B|A)=0.6$

C．若$P(B|A)=0.4$，则$P(AB)=0.12$

D．若$A\subseteq B$，则$P(A|B)=0.3$

10．如图，在正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，点P在线段B_1C上运动，则下列结论中正确的有



A．直线$BD_1\perp$平面A_1C_1D

B．直线$AP\,/\!/$平面A_1C_1D

C．异面直线AP与A_1D所成角的取值范围是$\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$

D．三棱锥A_1-PC_1D的体积为定值

11．已知函数$f(x)=\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{4}\right)$（$\omega>0$）在区间$[0,\pi]$上有且仅有4条对称轴，给出下列四个结论，正确的有

A．$f(x)$在区间$(0,\pi)$上有且仅有3个不同的零点

B．$f(x)$的最小正周期可能是$\frac{\pi}{2}$

C．ω的取值范围是$\left[\frac{13}{4},\frac{17}{4}\right)$

D．$f(x)$在区间$\left(0,\frac{\pi}{15}\right)$上单调递增

12．若函数$f(x)=\ln x+a\left(x^2-2x+1\right)(a\in R)$存在两个极值点$x_1,x_2$ $(x_1<x_2)$，则

A．函数$f(x)$至少有一个零点

B．$a<0$或$a>2$

C．$0<x_1<\frac{1}{2}$

D．$f(x_1)+f(x_2)>1-2\ln 2$

三、填空题：本题共4小题，每小题5分，共20分.

13. 已知$\left(x-\frac{a}{x}\right)^6$的展开式中含$x^2$项的系数为60，则实数$a=$______.

14. 设计一个圆锥形包装盒，能把一个半径为1的小球完全装入这个盒子（底面密封），那么这种圆锥形盒子的体积的最小值是______.

15. 函数$f(x)$在R上单调递减，且$f(2+x)+f(2-x)=0$，对于任意的$A\in[0,\pi]$，均有$f(m+3\sin A)+f(4-\sqrt{3}\cos A)\geq 0$恒成立，则实数$m$的最大值为______.

16. 黎曼猜想由数学家波恩哈德·黎曼于1859年提出，是至今仍未解决的世界难题．黎曼猜想研究的对象是类似于$\xi(n)=\sum_{n=1}^{\infty}n^{-s}=\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots$的无穷级数，我们经常从无穷级数的部分和$\frac{1}{1^s}+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots+\frac{1}{n^s}$入手．请你回答以下问题：

（1）$\left[\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{10^2}\right]=$______．（其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数，如$[-3.5]=4,[2]=2$.）

（2）已知正项数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且满足$S_n=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$，则$\left[\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_2}+\cdots+\frac{1}{S_{2023}}\right]=$______.

（第1空2分，第2空3分。）

四、解答题：本题共6小题，第17题10分，18—22题各12分，共70分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．**（本小题满分10分）**

某研究性学习小组对某植物种子的发芽率 y 与环境平均温度 x（°C）之间的关系进行研究，他们经过5次独立实验，得到如下统计数据：

第 n 次	1	2	3	4	5
环境平均温度 x（°C）	18	19	20	21	22
种子发芽率 y	62%	69%	71%	72%	76%

参考公式：$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\overline{x})^2},\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$．

（1）若从这5次实验中任意抽取2次，设种子发芽率超过70%的次数为 ξ，求随机变量 ξ 的分布列与数学期望；

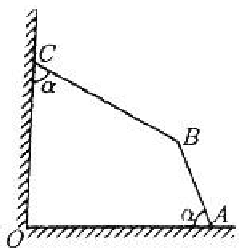
（2）根据散点图可以发现，变量 y 与 x 之间呈线性相关关系．如果在第6次实验时将环境平均温度仍然控制在21°C，根据回归方程估计这次实验中该植物种子的发芽率．

18．**（本小题满分12分）**

某公园要建造如图所示的绿地 $OABC$，OA,OC 为互相垂直的墙体，已有材料可建成的围栏 AB 与 BC 的总长度为12米且 $\angle BAO=\angle BCO$．设 $\angle BAO=\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$．

（1）当 $AB=3$ 米，$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ 时，求 OB 的长；

（2）当 $AB=6$ 米时，求 $OABC$ 面积S的最大值及此时 α 的值．



19.（本小题满分 12 分）

已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=n^2-2n+2(n\in N^*)$，数列$\{b_n\}$的前n项和T_n满足关系式$T_n=1-b_n(n\in N^*)$.

（1）求数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的通项公式；

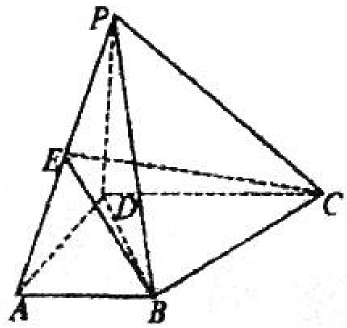
（2）设数列$\{a_n\cdot b_n\}$的前n项和为R_n，求证：$\frac{1}{2}\le R_n<2$.

20.（本小题满分 12 分）

如图，四棱锥$P\text{-}ABCD$的底面为梯形，$PD\perp$底面$ABCD$，$\angle BAD=\angle CDA=90^\circ$，$AD=AB=1$，$CD=2$，$E$为$PA$的中点.

（1）证明：平面$PBD\perp$平面BCE；

（2）若二面角$P\text{-}BC\text{-}E$的余弦值为$\frac{2\sqrt{6}}{5}$，求三棱锥$P\text{-}BCE$的体积.



21.（本小题满分 12 分）

已知椭圆C的焦点坐标为$F_1(-1,0)$和$F_2(1,0)$，且椭圆经过点$G\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

（1）求椭圆C的方程；

（2）若$T(1,1)$，椭圆C上四点M，N，P，Q满足$\overrightarrow{MT}=3\overrightarrow{TQ}$，$\overrightarrow{NT}=3\overrightarrow{TP}$，求直线$MN$的斜率.

22.（本小题满分 12 分）

已知函数$f(x)=e^x-a\sin x-1(a>0)$在区间$(0,\pi)$内有唯一极值点x_1.

（1）求实数a的取值范围；

（2）证明：$f(x)$在区间$(0,\pi)$内有唯一零点x_2，且$x_2<2x_1$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。