2022－2023【南京市、盐城市】3月一模

一、单选题

1	2	3	4	5	6	7
B	A	D	B	C	D	B

1.【T8】设 $a,b\in R,4^b=6^a-2^a,5^a=6^b-2^b$，则 ( )

A. $1<a<b$ B. $0<b<a$ C. $b<0<a$ D. $b<a<1$

【答案】A

【解析】因为 $x<0$ 时，$6^x-2^x<0$，所以 $a,b>0$，故 C 错；

若 $a>b,4^b=6^a-2^a>6^b-2^b=5^a$，矛盾，故 B,D 错

故选 A

二、多选题

9	10	11
BCD	AB	BCD

2.【T12】已知 $f(\theta)=\cos4\theta+\cos3\theta$，且 $\theta_1,\theta_2,\theta_3$ 是 $f(\theta)$ 在 $(0,\pi)$ 上的三个不同零点，则 ( )

A. $\frac{\pi}{7}\in\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$ B. $\theta_1+\theta_2+\theta_3=\pi$

C. $\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3=-\frac{1}{8}$ D. $\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3=\frac{1}{2}$

【答案】ACD

【解析】$f(\theta)=8c^4+4c^3-8c^2-3c+1=(c+1)(8c^3-4c^2-4c+1)$

对于 A：$f\left(\frac{\pi}{7}\right)=\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{3}{7}\pi=0$，正确；

对于 B：

方法一：令 $g(x)=8x^3-4x^2-4x+1$，

① $g\left(-\frac{1}{2}\right)=1>0,g(-1)=-7<0$，则 $g(x)$ 在 $\left(-1,-\frac{1}{2}\right)$ 上存在零点，则 $\theta\in\left(\frac{2\pi}{3},\pi\right)$，

② $g\left(\frac{1}{2}\right)=-1<0,g(0)=1>0$，则 $g(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 上存在零点，则 $\theta\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\theta_1+\theta_2+\theta_3>\frac{2\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=\pi$，错误

方法二：

$f(\theta)=2\cos\frac{7\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=0\Rightarrow\frac{7\theta}{2}$ 或 $\frac{\theta}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi$，解得 $\theta=\frac{\pi+2k\pi}{7}$ 或 $\pi+2k\pi$

所以三根为 $\frac{\pi}{7},\frac{3\pi}{7},\frac{5\pi}{7},\theta_1+\theta_2+\theta_3=\frac{9\pi}{7}$

对于 C,D：根据韦达定理得 $\cos\theta_1\cos\theta_2\cos\theta_3=-\frac{1}{8},\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3=\frac{1}{2}$

附：$ax^3+bx^2+cx+d=0$，三根为 x_1,x_2,x_3，则

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}$$

$$x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\frac{c}{a}$$

$$x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}$$

三、填空题

13	14	15
6	$-\frac{4}{5}$	3

3.【T16】直线 $x=t$ 与曲线 $C_1:y=-e^x+ax(a\in R)$ 及曲线 $C_2:y=e^{-x}+ax$ 分别交于点 A,B. 曲线 C_1 在 A 处的切线为 l_1，曲线 C_2 在 B 处的切线为 l_2. 若 l_1,l_2 相交于点 C，则 $\triangle ABC$ 面积的最小值为______.

【答案】2

【解析】设 $A(x_1,-e^{x_1}+ax_1),B(x_1,e^{-x_1}+ax_1)$，则

$$l_1:y=(-e^{x_1}+a)x+(x_1-1)e^{x_1}$$

$$l_2:y=(-e^{-x_1}+a)x+(x_1+1)e^{-x_1}$$

则

$$x_C=\frac{(x_1+1)e^{-x_1}-(x_1-1)e^{x_1}}{e^{-x_1}-e^{x_1}}$$

$$S=\frac{1}{2}\cdot(e^{-x_1}+e^{x_1})\cdot|x_C-x_1|=\frac{1}{2}\left|\frac{(e^{x_1}+e^{-x_1})^2}{e^{-x_1}-e^{x_1}}\right|$$

令 $m=e^{-x_1}-e^{x_1}$

$$S=\frac{1}{2}\left|\frac{m^2+4}{m}\right|\geqslant2$$

当且仅当 $m=\pm2$ 时取"="

四、解答题

17.(1) $a_1=\pm1$；(2) $b_n=-n+\frac{5}{4}$

18.(1) $\sin A=\frac{4}{5}$；(2) 选③，不存在

19.(1) 靠近 A 的四等分点；(2) $\frac{\sqrt{13}}{2}$

20.(1) $\frac{11}{20}$；(2) ① $\frac{1}{9}$；②方案二

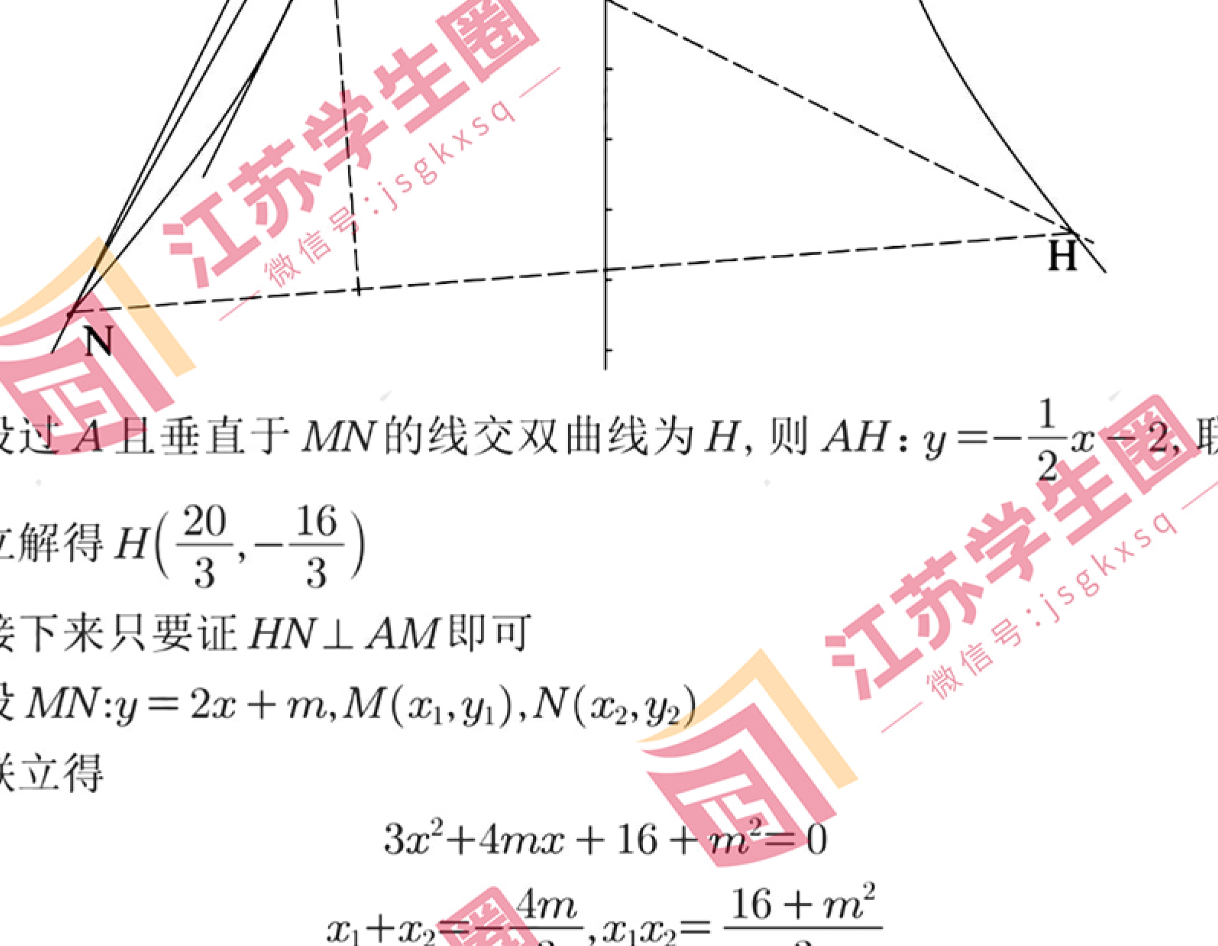
4.【T21】已知双曲线：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$ 的离心率为 $\sqrt{2}$，直线 $l_1:y=2x+4\sqrt{3}$ 与双曲线 C 仅有一个公共点.

(1) 求双曲线 C 的方程；

(2) 设双曲线 C 的左顶点为 A，直线 $l_2//l_1$，且交双曲线 C 于 M,N 两点，求证：$\triangle AMN$ 的垂心在双曲线 C 上.

【答案】(1) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1$

【解析】



设过 A 且垂直于 MN 的线交双曲线为 H，则 $AH:y=-\frac{1}{2}x-2$，联立解得 $H\left(\frac{20}{3},-\frac{16}{3}\right)$

接下来只要证 $HN\perp AM$ 即可

设 $MN:y=2x+m,M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$

联立得

$$3x^2+4mx+16+m^2=0$$

$$x_1+x_2=-\frac{4m}{3},x_1x_2=\frac{16+m^2}{3}$$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{HN}=(x_1+4)\left(x_2-\frac{20}{3}\right)+y_1\left(y_2+\frac{16}{3}\right)$

$=5x_1x_2+(2m+4)(x_1+x_2)+m^2+\frac{16}{3}m-\frac{80}{3}$

$=\frac{80+5m^2}{3}-\frac{4}{3}(2m^2+4m)+m^2+\frac{16}{3}m-\frac{80}{3}$

$=0$

5.【T22】已知 $k\in R$，函数 $f(x)=3\ln(x+1)+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x+kx,x\in(-1,2)$.

(1) 若 $k=0$，求证：$f(x)$ 仅有 1 个零点；

(2) 若 $f(x)$ 有两个零点，求实数 k 的取值范围.

【解析】(1) $f(x)=3\ln(x+1)+\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}x,f(0)=0$，

$x\in(0,2)$ 时：$\ln(x+1)>0,\sin\frac{\pi}{2}x>0$，所以 $f(x)>0$

$x\in(-1,0)$ 时：$\ln(x+1)<0,\sin\frac{\pi}{2}x<0$，所以 $f(x)<0$

所以 $f(x)$ 仅有 1 个零点 0

(2) $f(0)=0,f(2)=3\ln3+2k$

$$f'(x)=\frac{3}{x+1}+\cos\frac{\pi}{2}x+k,f''(x)=-\frac{3}{(x+1)^2}-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x$$

当 $0\leqslant x<2$ 时，$f''(x)<0$

当 $-1<x<0$ 时，因为 $-\frac{3}{(x+1)^2}\leqslant-3,-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x<3$，所以 $f''(x)<0$，所以当 $-1<x<2$ 时，$f''(x)<0,f'(x)\searrow$

$f'(0)=k+4,f'(2)=k$

①若 $k\geqslant0,f'(x)\geqslant f'(2)=k\geqslant0$，所以 $f(x)\nearrow$，只有 1 个零点，舍去

②若 $k<0,f'\left(\frac{3}{1-k}-1\right)>0,f'(2)<0$，

所以 $f'(x)$ 在 $\left(\frac{3}{1-k}-1,2\right)$ 上存在唯一零点 x_0

$f'(x)>\frac{3}{x+1}-1+k>0\Rightarrow x<\frac{3}{1-k}-1$

则 $f(x)$ 在 $(-1,x_0)\nearrow(x_0,+2)\searrow$

1° 若 $x_0<0$，即 $k<-4$ 时，$f(x_0)>f(0)=0,f\left(\ln\frac{k}{3}-1\right)<0$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(\ln\frac{k}{3}-1,x_0\right)$ 又存在一个零点

$f(x)<3\ln(x+1)+0-k<0\Rightarrow x<\ln\frac{k}{3}-1$

2° 若 $x_0=0$，即 $k=-4$ 时，只有 1 个零点，舍去

3° 若 $x_0>0$，即 $k>-4$ 时只需 $f(2)=3\ln3+2k<0$，即 $k<-\frac{3\ln3}{2}$

综上 $k<-\frac{3\ln3}{2}$ 且 $k\neq-4$