徐州市2022届高三第三次质量抽测

数学参考答案及评分标准

一、选择题：**1.** C　**2.** A　**3.** B　**4.** B　**5.** D　**6.** B　**7.** C　**8.** D

二、选择题：**9.** BD　**10.** BCD　**11.** AC　**12.** ABD

三、填空题：**13.** $\left(-\frac{3\sqrt{10}}{10},-\frac{\sqrt{10}}{10}\right)$　**14.** $2\sin\frac{\pi x}{2}$（答案不唯一，如 $2\sin\frac{(4n+1)\pi}{2}x\,(n\in\mathbf{Z})$）

15. 16　**16.**（第一空2分，第二空3分），$a^2+b^2=1$；4π

四、解答题：

17. 方法1： 在$\triangle ABC$中，由余弦定理，得$\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$，

又$a\cos B+\frac{\sqrt{3}}{2}b=c$，所以$a\cdot\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}+\frac{\sqrt{3}}{2}b=c$，化简得$a^2-b^2-c^2+\sqrt{3}bc=0$．　2分

所以由余弦定理，得$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，又$0<A<\pi$，所以$A=\frac{\pi}{6}$．　……4分

对于条件①， 因为$0<C=\pi-\frac{\pi}{6}-B<\frac{5\pi}{6}$，$\sin C=\frac{\sqrt{2}}{2}$，

所以$C=\frac{\pi}{4}$或$C=\frac{3\pi}{4}$．所以$\triangle ABC$不唯一确定，不合题意．……6分

对于条件②， 将$a=\sqrt{7}$，$b=\sqrt{3}$代入$a^2-b^2-c^2+\sqrt{3}bc=0$，得$c^2-3c-4=0$，

所以$c=4$（$c=-1$，舍去），$\triangle ABC$唯一确定．　……8分

因为$\triangle ABC$的面积为$S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ah$，

所以$h=\frac{bc\sin A}{a}=\frac{4\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{6}}{\sqrt{7}}=\frac{2\sqrt{21}}{7}$．　……10分

方法2： 因为$a\cos B+\frac{\sqrt{3}}{2}b=c$，

所以由正弦定理，得$\sin A\cos B+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B=\sin C=\sin(A+B)$，　……2分

即$\sin A\cos B+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B=\sin A\cos B+\cos A\sin B$，

所以$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B=\cos A\sin B$，因为在$\triangle ABC$中，$\sin B>0$，

所以 $\cos A=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，又 $0<A<\pi$，所以 $A=\dfrac{\pi}{6}$． ……4 分

对于条件①， 因为 $0<C=\pi-\dfrac{\pi}{6}-B<\dfrac{5\pi}{6}$，$\sin C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $C=\dfrac{\pi}{4}$，或 $C=\dfrac{3\pi}{4}$．

所以 $\triangle ABC$ 不唯一确定，不合题意． ……6 分

对于条件②， 因为 $a=\sqrt{7}, b=\sqrt{3}$，所以由正弦定理，

得 $\dfrac{\sqrt{7}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sin B}$，所以 $\sin B=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}$．又因为 $a>b$，所以 $0<B<A<\dfrac{\pi}{6}$，

所以 B 唯一确定，$\triangle ABC$ 能唯一确定． ……8 分

此时 $\cos B=\sqrt{1-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\right)^2}=\dfrac{5}{2\sqrt{7}}$，

$\sin C=\sin\left(\pi-\dfrac{\pi}{6}-B\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+B\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2\sqrt{7}}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$，

所以 $h=b\sin C=\sqrt{3}\times\dfrac{2}{\sqrt{7}}=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$． …… 10 分

18．（1）因为 $S_n=2a_n-1$，所以当 $n=1$ 时，$S_1=2a_1-1$，$a_1=1$． …… 1 分

当 $n\geqslant 2$ 时，$\begin{cases}S_n=2a_n-1,\\ S_{n-1}=2a_{n-1}-1,\end{cases}$ 所以 $a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1}$，所以 $a_n=2a_{n-1}$， … 3 分

又因为 $a_1=1\neq 0$，所以 $\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=2$，所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，2 为公比的等比数列，

其通项公式为 $a_n=2^{n-1}$． …… 5 分

（2）由（1）得，$a_n=2^{n-1}$，所以 $T_n=\left(2^{n-1}b_n\right)^n$，

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$\dfrac{T_n}{T_{n-1}}=\dfrac{\left(2^{n-1}b_n\right)^n}{\left(2^{n-2}b_{n-1}\right)^{n-1}}$，得 $b_n=\dfrac{2^{n(n-1)}\left(b_n\right)^n}{2^{(n-1)(n-2)}\left(b_{n-1}\right)^{n-1}}$， …… 8 分

所以 $\left(\dfrac{b_n}{b_{n-1}}\right)^{n-1}=\dfrac{2^{(n-1)(n-2)}}{2^{n(n-1)}}=\dfrac{1}{4^{n-1}}$， ……10 分

又因为数列$\{b_n\}$的各项均为正数，所以$\dfrac{b_n}{b_{n-1}}=\dfrac{1}{4}$，

所以$\{b_n\}$是首项为1，公比为$\dfrac{1}{4}$的等比数列.　　　　　　　　　……12分

19.（1）根据统计图表提供的信息，8年的生产总值的平均值为

$\dfrac{12+14+18+24+32+52+73+95}{8}=40$（百万元）.　　　　　　　　……1分

所以第三产业生产总值不低于40百万元的有第6，7，8年，共有3年.

所以X的可能取值为0，1，2，　　　　　　　　　　　　　　　　　……2分

则$P(X=0)=\dfrac{C_5^2}{C_8^2}=\dfrac{10}{28}=\dfrac{5}{14}$；$P(X=1)=\dfrac{C_5^1C_3^1}{C_8^2}=\dfrac{15}{28}$；$P(X=2)=\dfrac{C_3^2}{C_8^2}=\dfrac{3}{28}$.

所以X的分布列为

X	0	1	2
P	$\dfrac{5}{14}$	$\dfrac{15}{28}$	$\dfrac{3}{28}$

……5分

所以X的数学期望为$E(X)=0\times\dfrac{5}{14}+1\times\dfrac{15}{28}+2\times\dfrac{3}{28}=\dfrac{21}{28}=\dfrac{3}{4}$，或$E(X)=\dfrac{3\times2}{8}=\dfrac{3}{4}$. …6分

（2）根据第x年的第三产业生产总值为y（单位：百万元）及统计图表，得

x	5	6	7	8
y	32	52	73	95

所以$\bar{x}=\dfrac{13}{2}=6.5$，$\bar{y}=63$，$\sum\limits_{i=1}^{4}x_iy_i=1743$，$\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2=174$，

所以$\hat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{4}x_iy_i-4\bar{x}\bar{y}}{\sum\limits_{i=1}^{4}x_i^2-4\bar{x}^2}=\dfrac{1743-1638}{174-169}=\dfrac{105}{5}=21$，　　　　　　……8分

$a=\bar{y}-\hat{b}\bar{x}=63-21\times6.5=-73.5$，

所以产值y关于年数x的线性回归方程为$y=21x-73.5$.　　　　　　……10分

当$x=10$时，$y=21\times10-73.5=136.5$.

答：第10年第三产业生产总值约为136.5百万元.　　　　　　　　　　……12分

20．方法 1：（1）取 NC 的中点 G，连接 MG,GD．

因为 N,Q 分别为 PG,PD 的中点，

所以 $NQ//GD$．　　　　……2 分

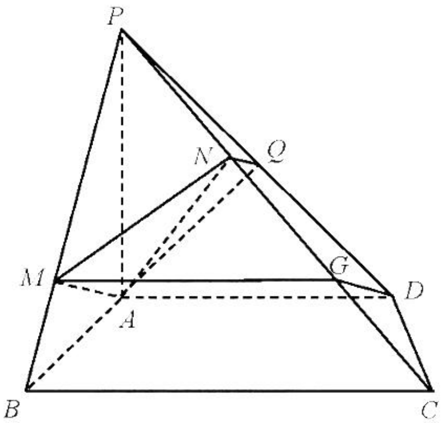
在 $\triangle PBC$ 中，$\dfrac{PM}{MB}=\dfrac{PG}{GC}=2$，

所以 $MG//BC$，$MG=\dfrac{2}{3}BC$，

因为 $AD//BC$，$AD=\dfrac{2}{3}BC$，

所以 $MG//AD$，$MG=AD$，

所以四边形 $MGDA$ 为平行四边形，



所以 $AM//GD$，　　　　……4 分

所以 $AM//NQ$，　所以 A,M,N,Q 四点共面．　……5 分

（2）因为 $PA\perp$ 面 $ABCD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，

$AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AD$，$PA\perp AB$，

又因为在平面 $ABCD$ 内，$AD//BC$，$AB\perp BC$，

所以 $AD\perp AB$．以 $\{AB,AD,AP\}$ 为正交基底，

建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$．…6 分

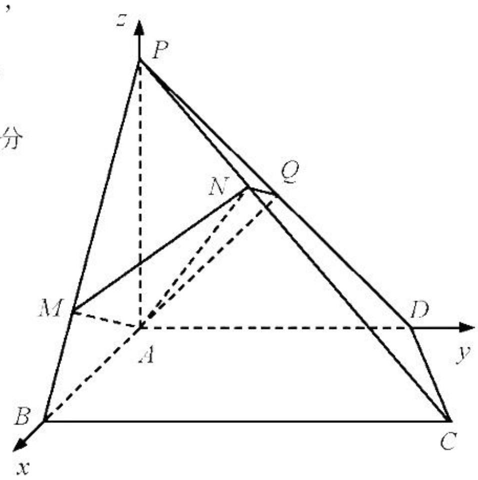
因为 $PA=AB=AD=\dfrac{2}{3}BC=2$．

所以 $A(0,0,0)$，$P(0,0,2)$，

$B(2,0,0)$，$C(2,3,0)$，$D(0,2,0)$．

因为 $PM=2MB$，

所以 $M\left(\dfrac{4}{3},0,\dfrac{2}{3}\right)$，$\overrightarrow{AM}=\left(\dfrac{4}{3},0,\dfrac{2}{3}\right)$．



设 $\overrightarrow{PN}=\lambda\overrightarrow{PC}=(2\lambda,3\lambda,-2\lambda)$，$\lambda\in[0,1]$，又因为 $\overrightarrow{AP}=(0,0,2)$，

所以 $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{PN}=(2\lambda,3\lambda,2-2\lambda)$，　……7 分

设平面 AMN 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$，所以 $\begin{cases}\overrightarrow{AM}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AN}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+z=0,\\ 2\lambda x+3\lambda y+(2-2\lambda)z=0.\end{cases}$

令 $x=1$，得平面 AMN 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=\left(1,\dfrac{4-6\lambda}{3\lambda},-2\right)$. ……9 分

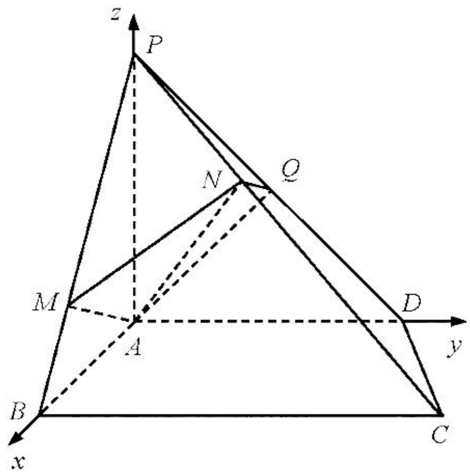
设直线 PA 与平面 AMN 所成角为 θ，

所以 $\sin\theta=\left|\cos<\overrightarrow{PA},\boldsymbol{n}>\right|=\left|\dfrac{\overrightarrow{PA}\cdot\boldsymbol{n}}{\left|\overrightarrow{PA}\right|\left|\boldsymbol{n}\right|}\right|=\dfrac{2}{\sqrt{5+\left(\dfrac{4-6\lambda}{3\lambda}\right)^2}}$. ……11 分

当 $\lambda=\dfrac{2}{3}$ 时，$\sin\theta$ 的最大值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，

即直线 PA 与面 AMN 所成角的正弦值的最大值为 $\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$. ……12 分

方法 2：(1) 因为 $PA\perp$ 面 $ABCD$，$AB\subset$ 平面 $ABCD$，$AD\subset$ 平面 $ABCD$，所以 $PA\perp AD$，$PA\perp AB$，在平面 $ABCD$ 内，$AD//BC$，$AB\perp BC$，所以 $AD\perp AB$. 以 $\{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AP}\}$ 为正交基底，建立如图所示的空间直角坐标系 $A-xyz$. ……1 分



因为 $PA=AB=AD=\dfrac{2}{3}BC=2$.

$A(0,0,0)$，$P(0,0,2)$，$B(2,0,0)$，$C(2,3,0)$，$D(0,2,0)$. ……2 分

因为 $CN=2PN$，Q 为 PD 的中点，$PM=2MB$，

所以 $N\left(\dfrac{2}{3},1,\dfrac{4}{3}\right)$，$M\left(\dfrac{4}{3},0,\dfrac{2}{3}\right)$，$Q(0,1,1)$，

所以 $\overrightarrow{AM}=\left(\dfrac{4}{3},0,\dfrac{2}{3}\right)$，$\overrightarrow{NQ}=\left(-\dfrac{2}{3},0,-\dfrac{1}{3}\right)$， ……4 分

所以 $\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{NQ}$，所以 $\overrightarrow{AM}$，$\overrightarrow{NQ}$ 共线， ……5 分

又因为 AM，NQ 不共线，

所以 A, M, N, Q 四点共面. ……6 分

（2）同**方法 1**.

21.（1）设 $Q(x_0, y_0)$，则 $\overrightarrow{OQ}=(x_0, y_0)$，因为 $\overrightarrow{OQ}=\frac{3}{4}\overrightarrow{OH}$，$\overrightarrow{OH}=(3,4)$，

所以 $\begin{cases} x_0=\frac{3}{4}\times 3=\frac{9}{4}, \\ y_0=\frac{3}{4}\times 4=3, \end{cases}$ 即 $Q\left(\frac{9}{4}, 3\right)$， ……2 分

代入方程 $y^2=2px$，得 $p=2$，所以 E 的方程为 $y^2=4x$. ……4 分

（2）设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3), D(x_4, y_4)$，

所以直线 AB 的斜率 $k_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y_2-y_1}{\frac{y_2^2}{4}-\frac{y_1^2}{4}}=\frac{4}{y_2+y_1}$，

直线 CD 的斜率 $k_2=\frac{y_4-y_3}{x_4-x_3}=\frac{y_4-y_3}{\frac{y_4^2}{4}-\frac{y_3^2}{4}}=\frac{4}{y_3+y_4}$，

直线 AD 的斜率 $k_3=\frac{y_4-y_1}{x_4-x_1}=\frac{y_4-y_1}{\frac{y_4^2}{4}-\frac{y_1^2}{4}}=\frac{4}{y_4+y_1}$，

直线 BC 的斜率 $k_4=\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}=\frac{y_3-y_2}{\frac{y_3^2}{4}-\frac{y_2^2}{4}}=\frac{4}{y_3+y_2}$， …… 6 分

所以 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{y_1+y_2}{4}+\frac{y_3+y_4}{4}=\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}$，

$\frac{1}{k_3}+\frac{1}{k_4}=\frac{y_4+y_1}{4}+\frac{y_3+y_2}{4}=\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4}$，

所以 $\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}=\frac{1}{k_3}+\frac{1}{k_4}$. ……8 分

由 $\begin{cases} y-4=k_1(x-3), \\ y^2=4x \end{cases}$ 消去 x，得 $k_1y^2-4y+4(4-3k_1)=0$，

由 $\triangle=16-16k_1(4-3k_1)>0$，得 $k_1>1$ 或 $k_1<\frac{1}{3}$. 所以 $y_1+y_2=\frac{4}{k_1}, y_1y_2=\frac{4(4-3k_1)}{k_1}$，

设 AB 和 CD 中点分别为 M，N，

所以 $y_M=\frac{1}{2}(y_1+y_2)=\frac{2}{k_1}$， $x_M=\frac{y_M-4}{k_1}+3=\frac{2-4k_1}{k_1^2}+3$．

同理， $y_N=\frac{2}{k_2}$， $x_N=\frac{2-4k_2}{k_2^2}+3$， ……10 分

所以 $\frac{1}{k}=\frac{x_M-x_N}{y_M-y_N}=\frac{\frac{2-4k_1}{k_1^2}-\frac{2-4k_2}{k_2^2}}{\frac{2}{k_1}-\frac{2}{k_2}}=\frac{\left(\frac{1}{k_1^2}-\frac{1}{k_2^2}\right)-\left(\frac{2}{k_1}-\frac{2}{k_2}\right)}{\frac{1}{k_1}-\frac{1}{k_2}}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}-2$，

所以 $\frac{1}{k_3}+\frac{1}{k_4}-\frac{1}{k}=\frac{1}{k_1}+\frac{1}{k_2}-\frac{1}{k}=2$ （定值）． ……12 分

22.（1）因为 $f(x)=e^x+a\sin x-ax^2-(1+a)x$，

所以 $f'(x)=e^x+a\cos x-2ax-(1+a)$． …… 1 分

设 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=e^x-a(2+\sin x)$．

所以当 $a\leqslant 0$ 时， $g'(x)>0$， 函数 $y=g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增，

即函数 $y=f'(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增． …… 3 分

又 $f'(0)=0$， 所以当 $x<0$ 时， $f'(x)<0$， 当 $x>0$ 时， $f'(x)>0$．

所以当 $a\leqslant 0$ 时， $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，在 $(0,+\infty)$ 上单调递增． ……4 分

（2）有关结论：① $e^x\geqslant x+1$，$e^{-x}\geqslant 1-x$；②当 $x\geqslant 0$ 时，$x\geqslant\sin x$；当 $x\leqslant 0$ 时，$x\leqslant\sin x$．

（2.1）当 $a\leqslant 0$ 时，由（1）知不合题意；

（2.2）当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，若 $x\in(-\infty,0)$，

$$f'(x)=\frac{1}{e^{-x}}+a\cos x-2ax-(1+a)\leqslant\frac{1}{1-x}+a\cos x-2ax-(1+a)$$

$$\leqslant\frac{1}{1-x}+a-2ax-1-a=\frac{2ax\left[x-\left(1-\frac{1}{2a}\right)\right]}{1-x},$$

当 $1-\frac{1}{2a}<x<0$ 时， $f'(x)<0$， $f(x)$ 单调递减，不合题意； ……6 分

（2.3）当 $a>\frac{1}{2}$ 时，若 $x\in(0,1)$，同理有 $f'(x)\leqslant\frac{2ax\left[x-\left(1-\frac{1}{2a}\right)\right]}{1-x}$，

当 $0<x<1-\frac{1}{2a}$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减，不合题意；……8 分

（2.4）当 $a=\frac{1}{2}$ 时，$f(x)=e^x+\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x$，$f'(x)=e^x+\frac{1}{2}\cos x-x-\frac{3}{2}$，

设 $g(x)=f'(x)$，则 $g'(x)=e^x-\frac{1}{2}\sin x-1$.

①当 $x>0$ 时，$g'(x)=e^x-\frac{1}{2}\sin x-1\geqslant x+1-\frac{1}{2}\sin x-1\geqslant x-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}x>0$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，即 $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增．……10 分

②当 $x<0$ 时，

若 $x\in[-1,0)$，$g'(x)=e^x-\frac{1}{2}\sin x-1\leqslant\frac{1}{1-x}-\frac{1}{2}x-1=\frac{x(1+x)}{2(1-x)}\leqslant 0$，

若 $x\in(-\infty,-1]$，$g'(x)=e^x-\frac{1}{2}\sin x-1\leqslant\frac{1}{e}+\frac{1}{2}-1<0$，

所以 $g(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，即 $f'(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减．

由①②知，$f'(x)\geqslant f'(0)=0$，所以 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增．

综上所述，$a=\frac{1}{2}$．……12 分

附证：① $e^x\geqslant x+1, e^{-x}\geqslant 1-x$；②当 $x\geqslant 0$ 时，$x\geqslant\sin x$；当 $x\leqslant 0$ 时，$x\leqslant\sin x$．

①设 $m(x)=e^x-(x+1)$，则 $m'(x)=e^x-1$，

由 $m'(x)=e^x-1>0$，得 $x>0$，函数 $m(x)=e^x-(x+1)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；

由 $m'(x)=e^x-1<0$，得 $x<0$，函数 $m(x)=e^x-(x+1)$ 在 $(-\infty,0)$ 上单调递减，

所以 $m(x)=e^x-(x+1)\geqslant m(0)=0$，所以 $e^x\geqslant x+1$，所以 $e^{-x}\geqslant -x+1=1-x$．

②设 $n(x)=x-\sin x$，则 $n'(x)=1-\cos x\geqslant 0$，

所以函数 $n(x)=x-\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是增函数．

所以当 $x\geqslant 0$ 时，$n(x)=x-\sin x\geqslant n(0)=0$，即 $x\geqslant\sin x$；

当 $x\leqslant 0$ 时，$n(x)=x-\sin x\leqslant n(0)=0$，即 $x\leqslant\sin x$．

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。