

姓名 _____

座位号 _____

(在此卷上答题无效)

数 学(文科)

本试卷共4页,全卷满分150分,考试时间120分钟。
考生注意事项:

1. 答题前,先将自己的姓名、准考证号填写在试卷和答题卡上,并将准考证号条形码粘贴在答题卡上的指定位置。
2. 选择题的作答:每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
3. 非选择题的作答:用黑色签字笔直接答在答题卡上对应的答题区域内。写在试卷、草稿纸和答题卡上的非答题区域均无效。
4. 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并上交。

一、选择题:本题共12小题,每小题5分,共60分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | y^2 = 2x - 4, x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, $B = \{x | x^2 - 2x < 15\}$, 则 $A \cap B =$ B
 A. $(-3, 2]$ B. $[2, 5)$ C. $(-5, 2]$ D. $(2, 3)$

2. 复数 z 的共轭复数记为 \bar{z} , 则下列运算: ① $z + \bar{z}$; ② $z - \bar{z}$; ③ $z \cdot \bar{z}$; ④ $\frac{z}{z}$ 其结果一定是实数的是 D
 A. ①② B. ②④ C. ②③ D. ①③

3. 若两条直线 a, b 分别在两个不同的平面 α, β 内, 则“直线 a, b 不相交”是“ $\alpha // \beta$ ”的 A, B
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

4. 函数 $f(x) = \frac{e^x}{e^{2x} - 1}$ 的图象大致为 A

5. 已知函数 $f(x)$ 的导函数 $y = f'(x)$ 的图象如图所示, 则下列结论正确的是 B

A. $f(-1) = f(3)$ B. $f(-1) < f(3)$
 C. $f(3) < f(5)$ D. $f(-1) > f(5)$

6. 某城镇为改善当地生态环境, 2016年初投入资金120万元, 以后每年投入资金比上一年增加10万元, 从2020年初开始每年投入资金比上一年增加10%, 到2025年底该城镇生态环境建设共投资大约为 C
 A. 1600万元 B. 1660万元 C. 1700万元 D. 1810万元

7. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的乘积记为 T_n , 若 $T_2 = T_9 = 512$, 则 T_n 的最大值为 C
 A. 2^{15} B. 2^{14} C. 2^{13} D. 2^{12}

8. 已知将向量 $a = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 绕起点逆时针旋转 $\frac{\pi}{4}$ 得到向量 b , 则 $b =$

A. $\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)$ B. $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right)$
 C. $\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)$ D. $\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}, \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)$

9. 已知实数 a, b 满足 $\ln a + \ln b = \ln(a+b+3)$, 则 $a+b$ 的最小值为

A. $2\sqrt{3}$ B. 4 C. $2\sqrt{5}$ D. 6

10. 已知 $f(x), g(x)$ 分别是定义在 \mathbf{R} 上的奇函数与偶函数, 若 $f(x) = g(x) + \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, 则

A. $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $f(x)$ 取最大值 B. $x = \frac{\pi}{2}$ 时, $g(x)$ 取最大值
 C. $f(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减 D. $g(x)$ 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调递减

11. 已知等边三角形 ABC 的边长为 6, 点 P 满足 $3\vec{PA} + 2\vec{PB} + \vec{PC} = \mathbf{0}$, 则 $|\vec{PA}| =$

A. $\frac{7}{9}$ B. $\frac{\sqrt{7}}{6}$ C. $\sqrt{7}$ D. $\frac{\sqrt{7}}{3}$

12. 已知关于 x 的方程 $e^x = ax^2$ 有三个不等的实数根, 则实数 a 的取值范围是

A. $\left(\frac{1}{2}e, +\infty\right)$ B. $\left(\frac{e^2}{4}, +\infty\right)$
 C. $(e, +\infty)$ D. $(e^2, +\infty)$

二、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知 $\tan\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = 3$, 则 $\sin^2\alpha + \sin 2\alpha =$ $-\frac{1}{10}$

14. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+2y \geq 2 \\ x-y \leq 2 \\ x-4y+4 \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = x-2y$ 的最大值为 2

15. 中国茶文化博大精深, 茶水的口感与茶叶类型和水的温度有关. 经研究可知: 在室温 25°C 下, 某种绿茶用 85°C 的水泡制, 经过 x min 后茶水的温度为 $y^\circ\text{C}$, 且 $y = k \times 0.9085^x + 25$ ($x \geq 0, k \in \mathbf{R}$). 当茶水温度降至 55°C 时饮用口感最佳, 此时茶水泡制时间大约为 1.0986 min (结果保留整数). (参考数据: $\ln 2 \approx 0.6931, \ln 3 \approx 1.0986, \ln 0.9085 \approx -0.0960$)

16. 已知三棱锥相邻的两条棱长分别为 3 和 4, 其余棱长均为 5, 则该三棱锥的外接球的表面积为 25π

三、解答题: 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

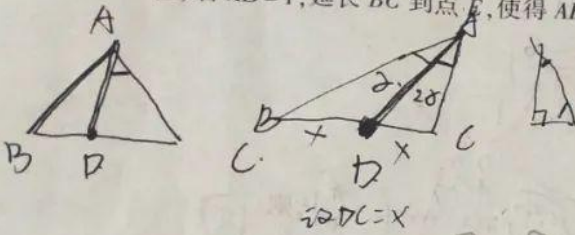
17. (10 分)
 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 2a_n - n^2$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

(1) 求证: 数列 $\{a_n + 2n + 3\}$ 是等比数列;
 (2) 求 $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1}$.

18. (12分)

在 $\triangle ABC$ 中, $AB = \sqrt{3}AC$, AD 为边 BC 上的中线, 记 $\angle CAD = 2\angle BAD = 2\alpha$.

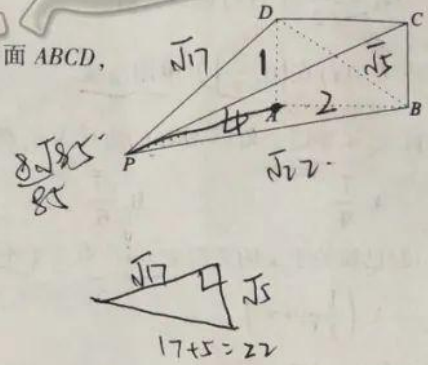
- (1) 求证: $\triangle ABC$ 为直角三角形;
(2) 若 $AD = 1$, 延长 BC 到点 E , 使得 $AE = \sqrt{13}CE$, 求 $\triangle ABE$ 的面积.



19. (12分)

已知四棱锥 $P-ABCD$ 中, 底面 $ABCD$ 为矩形, 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$.

- (1) 求证: $PA \perp$ 平面 $ABCD$;
(2) 若 $PA = 2AB = 4AD = 4$, 求点 A 到平面 PBD 的距离.



20. (12分)

已知函数 $f(x) = 2x^3 - 3(a^2 - a + 2)x^2 + 12(a^2 - a)x + 1$, $a \in \mathbb{R}$, 讨论 $f(x)$ 的单调性.

$f'(x) = 6x^2 - 6(a^2 - a + 2)x + 12(a^2 - a)$

$= 6x^2 - 6x - 12$

$6x^2 - 6(1 - 1 + 2)x + 12$

$(6x^2 - 12x) \cdot \frac{1}{6} \cdot (x - (a^2 - a))$

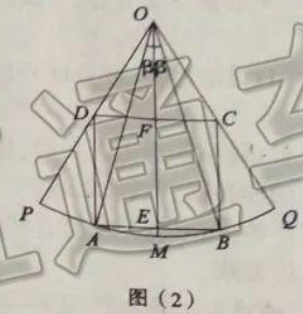
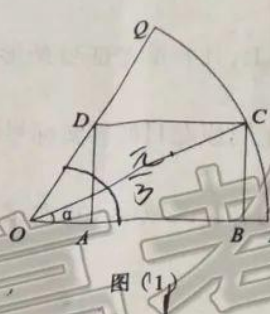
$x_1 = 2, x_2 = a^2 - a$

$a^2 - a + 2 = 0 \Rightarrow a^2 - a = -2$

$(a+2)(a-1) = 0 \Rightarrow a = -2$

21. (12分)

已知在扇形 OPQ 中, 半径 $OP=1$, 圆心角 $\angle POQ = \frac{\pi}{3}$. 从该扇形中截取一个矩形 $ABCD$, 有以下两种方案: 方案一: (如图1) C 是扇形弧上的动点, 记 $\angle COP = \alpha$, 矩形 $ABCD$ 内接于扇形; 方案二: (如图2) M 是扇形弧的中点, A, B 分别是弧 PM 和 MQ 上的点, 记 $\angle AOM = \angle BOM = \beta$, 矩形 $ABCD$ 内接于扇形. 要使截取的矩形面积最大, 应选取哪种方案? 并求出矩形的最大面积.



@高考直通车

22. (12分)

已知函数 $f(x) = \ln(x+1)$, $g(x) = \frac{ax}{x+1}$, 若 $F(x) = f(x) - g(x)$ 最小值为 0.

- (1) 求实数 a 的值;
- (2) 设 $n \in \mathbb{N}^*$, 证明: $g(1) + g(2) + \dots + g(n) + f(n) > n$.

(1) $f(x) = \ln(x+1)$, $g(x) = \frac{ax}{x+1}$
 $F(x) = \ln(x+1) - \frac{ax}{x+1}$

$\ln(x+1) - \frac{ax}{x+1}$

@高考直通车

ln a = 1/a, na = a-1, e^{at} = a.

a = e^{log_e a} = a-1.

na - a = log_e a.

ma = a-1.

x+1 > 0, x > -1.

(1-ax)(x+1)

(x+1) - ax^2 - ax

-ax - a - x - 1 + ax^2 + a

ax^2 - x - (a+1)

(1-ax)'(x+1) - (1-ax)(x+1)

= \frac{1-ax}{x+1} - \frac{(1-ax)(x+1)}{(x+1)^2}

= \frac{-a(x+1) - (1-ax)}{(x+1)^2}

= \frac{-a-1}{(x+1)^2}

-a-1 > 0

文数参考答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	B	A	B	D	A	C	D	C	C	B

1. 【解析】 $A = \{x | y^2 = 2x - 4\} = [2, +\infty)$, $B = \{x | x^2 - 2x < 15\} = (-3, 5)$, 所以 $A \cap B = [2, 5)$.

2. 【解析】 设 $z = a + bi (a, b \in R)$, 则 $\bar{z} = a - bi$, 故 $z + \bar{z} = 2a \in R$, $z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 \in R$.

3. 【解析】 由直线 a, b 不相交不能推出 $\alpha // \beta$; 由 $\alpha // \beta$, 可推出直线 a, b 不相交, 故选 B.

4. 【解析】 由 $f(-x) = \frac{e^{-x}}{e^{-2x} - 1} = \frac{e^x}{1 - e^{2x}} = -f(x)$, 所以 $f(x)$ 为奇函数, $f(1) = \frac{e}{e^2 - 1} > 0$, 故选 A.

5. 【解析】 由图可知 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$, $(3, 5)$ 上递减, 在 $(-1, 3)$, $(5, +\infty)$ 上递增, 故 $f(-1) < f(3)$.

6. 【解析】 设 2016 年到 2025 年每年投入资金分别为 $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, \dots, b_6$

由已知 a_1, a_2, a_3, a_4 为等差数列, $a_1 = 120, a_4 = 150$, 其和为 $S_1 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 540$.

b_1, b_2, \dots, b_6 为等比数列, $b_1 = 150 \times 1.1$, 公比 $q = 1.1$.

其和为 $S_2 = b_1 + b_2 + \dots + b_6 = \frac{150 \times 1.1(1 - 1.1^6)}{1 - 1.1} = 1650(1.1^6 - 1)$.

又 $1.1^6 \approx 1 + C_6^1 0.1 + C_6^2 0.1^2 + C_6^3 0.1^3 \approx 1.77$, $S_2 \approx 1270$.

共投入资金大约为 1810 万元, 故选 D.

7. 【解析】 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 由 $T_2 = T_6$ 得: $a_6^7 = 1$, 故 $a_6 = 1$, 即 $a_1 q^5 = 1$.

又 $a_1 a_2 = a_1^2 q = 512$, 所以 $q^9 = \frac{1}{512}$, 故 $q = \frac{1}{2}$, 所以 T_n 的最大值为 $T_6 = T_5 = a_5^5 = \left(\frac{a_6}{q}\right)^5 = 2^{15}$, 故选 A.

8. 【解析】 由已知得 $a = \left(\cos \frac{\pi}{3}, \sin \frac{\pi}{3}\right)$, 故 $b = \left(\cos \frac{7\pi}{12}, \sin \frac{7\pi}{12}\right)$, $\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$, $\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

9. 【解析】 由已知得 $ab = a + b + 3$, 即 $(a-1)(b-1) = 4$,

$a + b = (a-1) + (b-1) + 2 \geq 2\sqrt{(a-1)(b-1)} + 2 = 6$, 当且仅当 $a = b = 3$ 时取等号, 故选 D.

10. 【解析】 由已知得: $f(-x) = g(-x) + \cos\left(-x + \frac{\pi}{3}\right)$, 即 $-f(x) = g(x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

故 $f(x) = \frac{1}{2} \left[\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \right] = -\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x$, $g(x) = -\frac{1}{2} \cos x$

11. 【解析】 $6\overline{AP} = 2(\overline{AP} + \overline{PB}) + (\overline{AP} + \overline{PC}) = 2\overline{AB} + \overline{AC}$

$\overline{AP} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{6}\overline{AC}$, $\overline{AP}^2 = \left(\frac{1}{3}\overline{AB} + \frac{1}{6}\overline{AC}\right)^2 = 7$, 故 $|\overline{PA}| = \sqrt{7}$, 所以选 c.

12. 【解析】 问题等价于 $a = \frac{e^x}{x^2}$ 有三个不等的实数根,

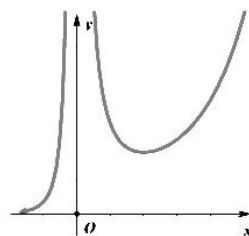
$a = \frac{e^x}{x^2}$

令 $f(x) = \frac{e^x}{x^2} (x \neq 0)$, $f'(x) = \frac{e^x(x-2)}{x^3}$,

所以 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$, $(2, +\infty)$ 上为增函数,

在 $(0, 2)$ 上为减函数, 又 $f(x) > 0$, 且极小值为 $f(2) = \frac{e^2}{4}$,

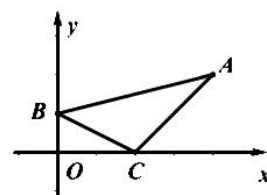
因此 $y = a$ 与 $f(x)$ 的图像有三个不同的交点时, $a > \frac{e^2}{4}$, 故选 B.



13. 【答案】 1 【解析】 由已知得 $\frac{1 + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha} = 3$, 解得 $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. 所以 $\sin^2 \alpha + \sin 2\alpha = \frac{\tan^2 \alpha + 2 \tan \alpha}{\tan^2 \alpha + 1} = 1$.

14. 【答案】 2 【解析】 满足 $\begin{cases} x + 2y \geq 2 \\ x - y \leq 2 \\ x - 4y + 4 \geq 0 \end{cases}$ 的可行域为 $\triangle ABC$ 及其内部,

其中 $A(4, 2), B(0, 1), C(2, 0)$, 且 C 点为最优解, $z_{\max} = 2$.



15. 【答案】 7 【解析】 由题意可知, 当 $x=0$ 时 $y=85$, 即

$85 = k + 25, k = 60$, 故 $y = 60 \times 0.9085^x + 25$. 当 $y=55$ 时得: $55 = 60 \times 0.9085^x + 25$,

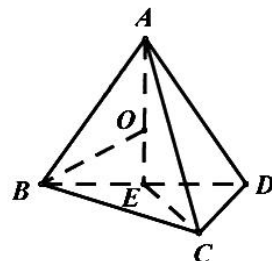
$x = \log_{0.9085} 0.5 = \frac{-\ln 2}{\ln 0.9085} \approx \frac{0.6931}{0.0960} \approx 7$.

16. 【答案】 $\frac{100\pi}{3}$ 【解析】 设在三棱锥 $A-BCD$ 中,

$CD = 3, BC = 4, AB = AC = AD = BC = 5, BC \perp CD$. 取 BD 的中点, 则 $AE \perp$

平面 BCD , 故 $\triangle ABD$ 的外心 O 就是外接球的球心. $OB = \frac{5\sqrt{3}}{3}$, 故求得表面

积为 $S = 4\pi \times OB^2 = \frac{100\pi}{3}$



17. 【解析】 (1) 当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = 2a_{n-1} - (n-1)^2$, 又 $a_n = S_n - S_{n-1}$

所以 $a_n = 2a_n - 2a_{n-1} - 2n + 1$, 故 $a_n = 2a_{n-1} + 2n - 1 \dots \dots \dots 2$ 分

所以 $a_n + 2n + 3 = 2a_{n-1} + 4n + 2 = 2(a_{n-1} + 2n + 1)$ 4分

又当 $n=1$ 时, $2S_1 = 3a_1 + 1$, $S_1 = a_1$, 故 $S_1 = a_1 = 1$, 所以 $a_1 + 5 = 6$.

故数列 $\{a_n + 2n + 3\}$ 是以 6 为首项, 以 2 为公比的等比数列5分

(2) 由 (1) 可知: $a_n + 2n + 3 = 3 \times 2^n$, 故 $a_n = 3 \times 2^n - 2n - 3$ 6分

$$\begin{aligned} & a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1} \\ &= (3 \times 2 - 5) + (3 \times 2^3 - 9) + (3 \times 2^5 - 13) + \dots + [3 \times 2^{2n-1} - (4n + 1)] \\ &= (3 \times 2 + 3 \times 2^3 + 3 \times 2^5 + \dots + 3 \times 2^{2n-1}) - [5 + 9 + 13 + \dots + (4n + 1)] \quad \dots\dots\dots 8 \text{分} \\ &= \frac{6(1 - 4^n)}{1 - 4} - \frac{n}{2}[5 + (4n + 1)] = 2^{2n+1} - 2n^2 - 3n - 2 \quad \dots\dots\dots 10 \text{分} \end{aligned}$$

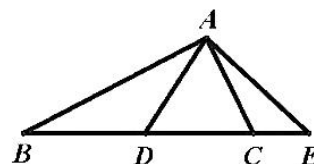
18. 【解析】(1) 在 $\triangle ABD$ 中, 正弦定理得: $\frac{AB}{\sin ADB} = \frac{BD}{\sin \alpha}$ 2分

在 $\triangle ACD$ 中, 由正弦定理得: $\frac{AC}{\sin ADC} = \frac{CD}{\sin 2\alpha}$

由已知, $BD = CD$ 且 $\sin ADB = \sin ADC$,

故 $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha}$ 4分

由 $AB = \sqrt{3}AC$, $\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha$, 所以 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.



又 $\alpha \in (0, \pi)$, 故 $\alpha = \frac{\pi}{6}$, 所以 $\angle BAC = 3\alpha = \frac{\pi}{2}$.

故 $\triangle ABC$ 为直角三角形.6分

(2) 由已知 $AD = 1$, 所以 $CD = BD = AD = AC = 1$, $\angle ACE = \frac{2\pi}{3}$

设 $CE = x$, 则 $AE = 2x$,

在 $\triangle ACE$ 中, 由余弦定理得 $AE^2 = AC^2 + CE^2 - 2AC \cdot CE \cos \frac{2\pi}{3}$ 9分

整理得 $12x^2 - x - 1 = 0$, 解得 $x = \frac{1}{3}$ 或 $x = -\frac{1}{4}$ (舍去).

故 $CE = \frac{1}{3}$, $BE = \frac{7}{3}$, $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2} AB \cdot BE \sin \frac{\pi}{6} = \frac{7\sqrt{3}}{12}$ 12分

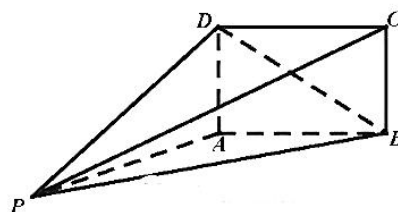
19. 【解析】(1) 平面 $PAB \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp AB$,

所以 $AD \perp$ 平面 PAB , 故 $PA \perp AD$ 2分

同理, 平面 $PAD \perp$ 平面 $ABCD$, $AD \perp AB$,

所以 $AB \perp$ 平面 PAD , 故 $PA \perp AB$ 4分

故 $PA \perp$ 平面 $ABCD$6分



(2) 由 (1) 可知, $PA \perp AD, PA \perp AB$,

由 $PA = 2AB = 4AD = 4$ 可求得,

$$BD = \sqrt{5}, PA = \sqrt{17}, PB = 2\sqrt{5}.$$

$$\Delta PBD, \cos \angle PBD = \frac{PB^2 + BD^2 - PD^2}{2PB \cdot BD} = \frac{2}{5},$$

$$\sin \angle PBD = \frac{\sqrt{21}}{5}, S = \frac{1}{2} PB \cdot BD \sin \angle PBD = \sqrt{21}. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{三棱锥 } A-PBD \text{ 的体积 } V_{A-PBD} = V_{D-PAB} = \frac{1}{3} S_{\Delta PAB} AD = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} PA \cdot AB \cdot AD = \frac{4}{3}.$$

$$\text{设 } h \text{ 为点 } A \text{ 到平面 } PBD \text{ 的距离, 则 } V_{A-PBD} = \frac{1}{3} S_{\Delta PBD} h = \frac{\sqrt{21}}{3} h, \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{所以得 } \frac{\sqrt{21}}{3} h = \frac{4}{3}, \text{ 故 } h = \frac{4\sqrt{21}}{21}.$$

$$\text{所以点 } A \text{ 到平面 } PBD \text{ 的距离为 } \frac{4\sqrt{21}}{21}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 【解析】 $f'(x) = 6x^2 - 6(a^2 - a + 2)x + 12(a^2 - a) = 6(x-2)(x-a^2+a)$ 2 分

由 $f'(x) = 0$, 得 $x = a^2 - a$ 或 $x = 2$

由 $a^2 - a = 2$, 得 $a = -1$ 或 $a = 2$

当 $a = 2$ 或 $a = -1$ 时, $f'(x) = 6(x-2)^2 \geq 0$;4 分

当 $a < -1$ 或 $a > 2$ 时, $a^2 - a > 2$,

$$x \in (-\infty, 2) \cup (a^2 - a, +\infty), f'(x) > 0; x \in (2, a^2 - a), f'(x) < 0.$$

当 $-1 < a < 2$ 时, $a^2 - a < 2$,

$$x \in (-\infty, a^2 - a) \cup (2, +\infty), f'(x) > 0; x \in (a^2 - a, 2), f'(x) < 0. \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

故当 $a = 2$ 或 $a = -1$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调递增;

当 $a < -1$ 或 $a > 2$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, 2), (a^2 - a, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(2, a^2 - a)$ 上单调递减;

当 $-1 < a < 2$ 时, $f(x)$ 在 $(-\infty, a^2 - a), (2, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(a^2 - a, 2)$ 上单调递减,12 分

21. 【解析】 方案 1: 由已知得: $OB = \cos \alpha, BC = \sin \alpha$, $OA = \frac{AD}{\tan 60^\circ} = \frac{BC}{\tan 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \alpha$

所以 $AB = OB - OA = \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \alpha$ 1分

设矩形 $ABCD$ 的面积为 S ，则

$$S = AB \cdot BC = \left(\cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \alpha \right) \sin \alpha = \frac{1}{2} \sin 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{6} \cos 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \left(2\alpha + \frac{\pi}{6} \right) - \frac{\sqrt{3}}{6} \quad \dots\dots\dots 3 \text{分}$$

由 $0 < \alpha < \frac{\pi}{3}$ ，得 $\frac{\pi}{6} < 2\alpha + \frac{\pi}{6} < \frac{5\pi}{6}$ ，所以当 $2\alpha + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$ ，即 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 时，

矩形 $ABCD$ 的最大面积为 $S_1 = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{6}$ 5分

方案2：由题意可知： $AB = 2AE = 2 \sin \beta$ ， $OE = \cos \beta$ ，

$$\text{又 } OF = \frac{DF}{\tan 30^\circ} = \frac{AE}{\tan 30^\circ} = \sqrt{3} \sin \beta，$$

$$AD = EF = OE - OF = \cos \beta - \sqrt{3} \sin \beta \quad \dots\dots\dots 6 \text{分}$$

设矩形 $ABCD$ 的面积为 S ，则

$$S = AB \cdot AD = 2 \sin \beta (\cos \beta - \sqrt{3} \sin \beta) = \sin 2\beta + \sqrt{3} \cos 2\beta - \sqrt{3}$$

$$= 2 \sin \left(2\beta + \frac{\pi}{3} \right) - \sqrt{3} \quad \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

又 $0 < \beta < \frac{\pi}{6}$ ，得 $\frac{\pi}{3} < 2\beta + \frac{\pi}{3} < \frac{2\pi}{3}$ ，所以当 $2\beta + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ ，即 $\beta = \frac{\pi}{12}$ 时，

矩形 $ABCD$ 面积取最大为 $S_2 = 2 - \sqrt{3}$ 10分

由于 $\left(\frac{7\sqrt{3}}{6} \right)^2 = \frac{49}{12} > 4$ ，故 $\frac{7\sqrt{3}}{6} > 2$ ，即 $\frac{\sqrt{3}}{6} > 2 - \sqrt{3}$ ，故 $S_1 > S_2$

故应选择方案1，当 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 时，矩形 $ABCD$ 的面积最大为 $\frac{\sqrt{3}}{6}$ 12分

22. 【解析】(1) 由已知 $F(x) = \ln(x+1) - \frac{ax}{x+1}$ ，定义域为 $(-1, +\infty)$ 。

$$F'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{a}{(x+1)^2} = \frac{x+1-a}{(x+1)^2} \quad \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

由 $F'(x) = 0$ ，得 $x = a - 1$ 。

当 $a \leq 0$ 时， $x \in (-1, +\infty)$ ， $F'(x) > 0$ ， $F(x)$ 在 $(-1, +\infty)$ 单调递增无最小值。

当 $a > 0$ 时, $x \in (-1, a-1), F'(x) < 0$; $x \in (a-1, +\infty), F'(x) > 0$.

故 $F(x)_{\min} = F(a-1) = \ln a - a + 1$ 4 分

令 $\varphi(x) = \ln x - x + 1 (x > 0)$, $\varphi'(x) = \frac{1-x}{x} (x > 0)$.

$x \in (0, 1), \varphi'(x) > 0$; $x \in (1, +\infty), \varphi'(x) < 0$, $\varphi(x)_{\max} = \varphi(1) = 0$

所以由 $\ln a - a + 1 = 0$, 得 $a = 1$6 分

(2) 由 (1) 可知 $a = 1$, 此时 $g(1) + g(2) + \dots + g(n) + f(n) > n$ 等价于:

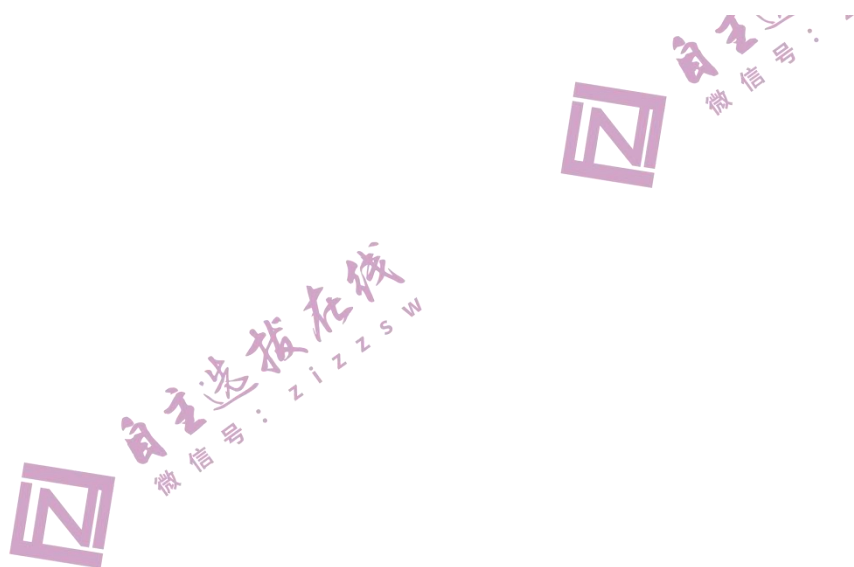
$\ln(n+1) > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}$ 8 分

由 (1) 可知当 $x > 0$ 时, $\ln(x+1) > \frac{x}{x+1}$.

故 $\ln\left(\frac{1}{n}+1\right) > \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+1} = \frac{1}{n+1}$, 即 $\ln(n+1) - \ln n > \frac{1}{n+1}$10 分

所以 $\ln(n+1) = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \dots + [\ln(n+1) - \ln n] > \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1}$

故 $g(1) + g(2) + \dots + g(n) + f(n) > n$ 12 分



关于我们

自主选拔在线（原自主招生在线）创办于 2014 年，历史可追溯至 2008 年，隶属北京太星网络科技有限公司，是专注于**中国拔尖人才培养**的升学咨询在线服务平台。主营业务涵盖：新高考、学科竞赛、强基计划、综合评价、三位一体、高中生涯规划、志愿填报等。

自主选拔在线旗下拥有网站门户、微信公众平台等全媒体矩阵生态平台。平台活跃用户达百万量级，网站年度流量超 1 亿量级。用户群体涵盖全国 31 省市，全国超 95% 以上的重点中学老师、家长及考生，更有许多重点高校招办老师关注，行业影响力首屈一指。

自主选拔在线平台一直秉承“专业、专注、有态度”的创办理念，不断探索“K12 教育+互联网+大数据”的运营模式，尝试基于大数据理论为广大中学和家长提供中学拔尖人才培养咨询服务，为广大高校、中学和教科研单位提供“衔接和桥梁纽带”作用。

平台自创办以来，为众多重点大学发现和推荐优秀生源，和全国数百所重点中学达成深度战略合作，累计举办线上线下升学公益讲座千余场，直接或间接帮助数百万考生顺利通过强基计划（自主招生）、综合评价和高考，进入理想大学，在家长、考生、中学和社会各界具有广泛的口碑影响力，2019 年荣获央广网“年度口碑影响力在线教育品牌”。

未来，自主选拔在线将立足于全国新高考改革，全面整合高校、中学及教育机构等资源，依托在线教育模式，致力于打造更加全面、专业的**新高考拔尖人才培养**服务平台。



 微信搜一搜

 自主选拔在线