

秘密★启用前

理科数学试卷

注意事项:

1. 答题前,考生务必用黑色碳素笔将自己的姓名、准考证号、考场号、座位号在答题卡上填写清楚.
2. 每小题选出答案后,用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号.在试题卷上作答无效.
3. 考试结束后,请将本试卷和答题卡一并交回.满分150分,考试用时120分钟.

一、选择题(本大题共12小题,每小题5分,共60分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的)

1. 已知集合 $A = \{x | \log_2 x < 1\}$, 集合 $B = \{x \in \mathbf{N} | |x| < 2\}$, 则 $A \cup B =$
 - A. $\{x | 0 < x < 1\}$
 - B. $\{x | 0 \leq x < 2\}$
 - C. $\{x | -2 < x < 2\}$
 - D. $\{0, 1\}$
2. 已知 i 为虚数单位, 则复数 $(1-i)(1-i^2) =$
 - A. $2i$
 - B. $-2i$
 - C. 2
 - D. -2
3. 已知平面向量 \vec{a}, \vec{b} 的夹角为 30° , $|\vec{a}| = 1$, $\vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = -\frac{1}{2}$, 则 $|\vec{b}| =$
 - A. $\sqrt{3}$
 - B. 2
 - C. 3
 - D. 4
4. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y \geq 1, \\ 2x-y \geq 2, \\ y \leq 1, \end{cases}$ 则 $\frac{y}{x}$ 的最大值为
 - A. 2
 - B. $\frac{3}{2}$
 - C. 1
 - D. $\frac{2}{3}$
5. 在区间 $(0, 3)$ 上随机地取一个数 k , 则事件“直线 $y=kx$ 与双曲线 $C: x^2 - y^2 = 1$ 有两个不同的交点”发生的概率为
 - A. $\frac{1}{3}$
 - B. $\frac{1}{2}$
 - C. $\frac{2}{3}$
 - D. 1
6. 已知 $(2x-1)(x+a)^3$ 展开式中各项系数之和为 27 , 则其展开式中 x^2 项的系数为
 - A. 24
 - B. 18
 - C. 12
 - D. 4
7. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $\sin A = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $a = \sqrt{2}b$, $c > a$, 则角 C 的大小为
 - A. $\frac{\pi}{3}$
 - B. $\frac{\pi}{2}$
 - C. $\frac{2\pi}{3}$
 - D. $\frac{3\pi}{4}$

二、填空题 (本大题共4小题, 每小题5分, 共20分)

13. 命题“ $\forall x \in (0, +\infty), x^2 - 2x - m \geq 0$ ”为真命题, 则实数 m 的最大值为_____.
14. 设 $a \in \mathbf{R}$, 已知直线 $l: ax + y - 2a = 0$ 与圆 $C: (x-2)^2 + y^2 = 4$ 交于 A, B 两点, 则弦 AB 的长为_____.
15. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \in (0, 2], \\ f(x-2), & x \in (2, +\infty), \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在 $x=3$ 处的切线方程为_____.
16. 已知平面内一正六边形 $ABCDEF$ 的边长为1, 中心为点 O , 将该正六边形沿对角线 AD 折成二面角 $E-AD-C$, 则当二面角 $E-AD-C$ 的平面角余弦值为 $\frac{1}{3}$ 时, 三棱锥 $O-CEF$ 的外接球表面积为_____.

三、解答题 (共70分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤)

17. (本小题满分12分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 当 $n \in \mathbf{N}^+$ 时, $S_n = 2^{n+1} - n - 2$.

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;
- (2) 证明: 当 $n \in \mathbf{N}^+$ 时, $\frac{a_2}{a_1} + \frac{a_3}{a_2} + \frac{a_4}{a_3} + \dots + \frac{a_{n+1}}{a_n} < 2n + 2$.

18. (本小题满分12分)

改革开放以来, 中国快递行业持续快速发展, 快递业务量从上世纪80年代的153万件提升到2018年的507.1亿件, 快递行业的发展也给我们的生活带来了很大便利. 已知某市某快递点的收费标准为: 首重(重量小于等于1kg)收费10元, 续重5元/kg(不足1kg按1kg算). (如: 一个包裹重量为2.5kg, 则需支付首付10元, 续重10元, 一共20元快递费用)

- (1) 若你有三件礼物 A, B, C 重量分别为0.4kg, 1.2kg, 1.9kg, 要将三个礼物分成两个包裹寄出(如: A, B 合为一个包裹, C 一个包裹), 那么如何分配礼物, 使得你花费的快递费最少?
- (2) 为了解该快递点2019年的揽件情况, 在2019年内随机抽查了30天的日揽收包裹数(单位: 件), 得到如下表格:

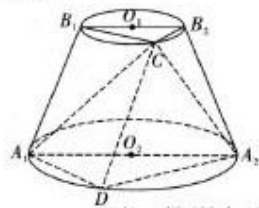
包裹数(单位: 件)	(0, 100]	(100, 200]	(200, 300]	(300, 400]
天数(天)	8	12	8	2

现用这30天的日揽收包裹数估计该快递点2019年的日揽收包裹数. 若从2019年任取4天, 记这4天中日揽收包裹数超过200件的天数为随机变量 X , 求 X 的分布列和期望.

19. (本小题满分12分)

如图3, 圆台 O_1O_2 的轴截面为等腰梯形 $A_1A_2B_2B_1$, $A_1A_2 \parallel B_1B_2$, $A_1A_2 = 2B_1B_2$, $A_1B_1 = 2$, 圆台 O_1O_2 的侧面积为 6π . 若点 C, D 分别为圆 O_1, O_2 上的动点且点 C, D 在平面 $A_1A_2B_2B_1$ 的同侧.

- (1) 求证: $A_1C \perp A_2C$;
- (2) 若 $\angle B_1B_2C = 60^\circ$, 则当三棱锥 $C-A_1DA_2$ 的体积取最大值时, 求 A_1D 与平面 CA_1A_2 所成角的正弦值.



20. (本小题满分12分)

已知抛物线 $C: y = \frac{1}{4}x^2$ 的焦点为 F , 过点 F 的直线 l 与抛物线 C 交于 A, B 两点, 且 $|AF| = \lambda |BF|$ ($\lambda \geq 2$).

- (1) 求直线 l 斜率的取值范围;
- (2) 过点 A, B 分别作抛物线 C 的切线交于点 P , 求 $\triangle ABP$ 面积的取值范围.

21. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = \ln x + 2x - ax^2$.

- (1) 讨论函数 $f(x)$ 的单调性;
- (2) 当 $a = 1$ 时, 判断并说明函数 $g(x) = f(x) - 3\cos x$ 的零点个数. 若函数 $g(x)$ 所有零点均在区间 $[m, n]$ ($m \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}$) 内, 求 $n - m$ 的最小值.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答, 并用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑. 注意所做题目的题号必须与所涂题目的题号一致, 在答题卡选答区域指定位置答题. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分10分) 【选修4-4: 坐标系与参数方程】

在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的方程为 $\begin{cases} x = 1 + \cos\alpha, \\ y = \sin\alpha, \end{cases}$ (α 为参数, 且 $\alpha \in (0, \pi)$), 若点 M 为曲线 C 上

的动点, 直线 OM 交直线 $x = 2$ 于点 P . 以坐标原点为极点, x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系.

- (1) 写出曲线 C 的极坐标方程及点 P 轨迹的极坐标方程;
- (2) 当 $|PM| = 3$ 时, 求点 P 的极坐标.

23. (本小题满分10分) 【选修4-5: 不等式选讲】

设函数 $f(x) = |x+1| - |x-1|$ 的最大值为 M .

- (1) 求 M 的值;
- (2) 设正数 a, b, c 满足 $a+b+c \leq M$, 求证: $ab+ac+bc \leq \frac{4}{3}$.



自主招生在线创始于 2014 年，致力于提供自主招生、综合评价、三位一体、学科竞赛、新高考生涯规划等政策资讯的服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（www.zizzs.com）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国自主招生、综合评价领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



识别二维码，快速关注

福利：

- 1、关注后回复“答题模板”，即可获得高中 9 科答题模板资料
- 2、回复“清北华五”，即可获得清北华东五校特殊选拔考试模式及真题