

2023 届高三年级苏州八校联盟第二次适应性检测

数学试卷

2022.12

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共计 40 分。每小题给出的四个选项中，只有一个选项是正确的。请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上。

- 对于全集  $U$  的子集  $M, N$ ，若  $M$  是  $N$  的真子集，则下列集合中必为空集的是 ( ▲ )
 

A.  $(\complement_U M) \cap N$       B.  $M \cap (\complement_U N)$       C.  $(\complement_U M) \cap (\complement_U N)$       D.  $M \cap N$
- 已知复数  $z$  的共轭复数是  $\bar{z}$ ，且  $\bar{z} = (|z|-1) + 5i$ ，则复数  $z =$  ( ▲ )
 

A.  $5-12i$       B.  $12-5i$       C.  $5+12i$       D.  $12+5i$
- 已知  $\vec{a} = (1, 2)$ ， $\vec{b} = (-1, 3)$ ，则  $\vec{a} - \vec{b}$  在  $\vec{a} + \vec{b}$  方向上的投影向量的坐标为 ( ▲ )
 

A.  $(0, 1)$       B.  $(-1, 0)$       C.  $(0, -1)$       D.  $(1, 0)$
- 双碳，即碳达峰与碳中和的简称，2020 年 9 月中国明确提出 2030 年实现“碳达峰”，2060 年实现“碳中和”。为了实现这一目标，中国加大了电动汽车的研究与推广，到 2060 年，纯电动汽车在整体汽车中的渗透率有望超过 70%，新型动力电池随之也迎来了蓬勃发展机遇。Peukert 于 1898 年提出蓄电池的容量  $C$ （单位： $A \cdot h$ ），放电时间  $t$ （单位： $h$ ）与放电电流  $I$ （单位： $A$ ）之间关系的经验公式  $C = I^n \cdot t$ ，其中  $n = \log_3 2$  为 Peukert 常数。在电池容量不变的条件下，当放电电流  $I = 10A$  时，放电时间  $t = 56h$ ，则当放电电流  $I = 15A$  时，放电时间为 ( ▲ )
 

A. 28h      B. 28.5h      C. 29h      D. 29.5h
- 等差数列  $\{a_n\}$  各项均为正数，首项与公差相等， $\sum_{k=1}^{15} \frac{1}{\sqrt{a_k} + \sqrt{a_{k+1}}} = \sqrt{2}$ ，则  $a_{2022}$  的值为 ( ▲ )
 

A. 9069      B. 9079      C. 9089      D. 9099
- 将函数  $y = \cos(x - \frac{\pi}{6})$  的图象上所有点的横坐标变为原来的  $\omega (\omega > 0)$  倍，纵坐标不变，得到的函数图象恰与函数  $f(x) = \sin(2x + \varphi) (0 < \varphi < \pi)$  的图象重合，则 ( ▲ )
 

A.  $\omega = 2$       B.  $\varphi = \frac{\pi}{6}$

C. 直线  $x = \frac{\pi}{6}$  是曲线  $y = f(x)$  的对称轴      D. 点  $(\frac{\pi}{3}, 0)$  是曲线  $y = f(x)$  的对称中心
- 抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  的焦点为  $F$ ， $C$  的准线与  $x$  轴交于点  $A$ ，过点  $F$  斜率为  $\sqrt{3}$  的直线与  $C$  交于点  $M, N$  ( $M$  在  $x$  轴上方)，则  $\frac{|AM|}{|AN|} =$  ( ▲ )
 

A.  $\frac{3}{2}$       B. 2      C.  $\frac{5}{2}$       D. 3

8. 设  $a = \frac{1}{5}, b = e^{\frac{\sin 1}{6}} - 1, c = \ln \frac{11}{9}$ , ( $e$  是自然对数的底数) 则 (▲)

- A.  $a > b > c$       B.  $a > c > b$       C.  $c > a > b$       D.  $b > c > a$

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共计 20 分。每小题给出的四个选项中，都有多个选项是正确的，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，选错或不答的得 0 分。请把正确的选项填涂在答题卡相应的位置上。

9. 下面命题正确的是 (▲)

- A. “ $x > 3$ ”是“ $x > 5$ ”的必要不充分条件  
 B. “ $ac < 0$ ”是“一元二次方程  $ax^2 + bx + c = 0$  有一正一负根”的充要条件  
 C. 设  $x, y \in R$ , 则“ $x + y \geq 4$ ”是“ $x \geq 2$  且  $y \geq 2$ ”的充分不必要条件  
 D. “ $x \neq 1$ ”是“ $x^2 - 4x + 3 \neq 0$ ”的必要不充分条件

10. 定义在  $(0, \frac{\pi}{2})$  上的函数  $f(x)$ ,  $f'(x)$  是它的导函数, 且恒有  $f(x) > f'(x) \cdot \tan x$  成立, 则下列正确的是 (▲)

- A.  $\sqrt{3}f(\frac{\pi}{4}) > \sqrt{2}f(\frac{\pi}{3})$       B.  $f(1) > 2f(\frac{\pi}{6})\sin 1$   
 C.  $\sqrt{2}f(\frac{\pi}{6}) < f(\frac{\pi}{4})$       D.  $\sqrt{3}f(\frac{\pi}{6}) > f(\frac{\pi}{3})$

11. 2022 年卡塔尔世界杯会徽 (如图) 正视图近似伯努利双纽线。定义在平面直角坐标系  $xOy$  中, 把到定点  $F_1(-a, 0), F_2(a, 0)$  距离之积等于  $a^2$  ( $a > 0$ ) 的点的轨迹称为双纽线  $C$ 。已知点

$P(x_0, y_0)$  是双纽线  $C$  上一点, 下列说法中正确的有 (▲)

- A. 双纽线  $C$  关于原点  $O$  中心对称;  
 B.  $-\frac{a}{2} \leq y_0 \leq \frac{a}{2}$ ;  
 C. 双纽线  $C$  上满足  $|PF_1| = |PF_2|$  的点  $P$  有两个;  
 D.  $|PO|$  的最大值为  $\sqrt{2}a$ 。

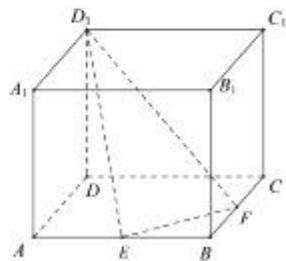


(第 11 题图)

12. 如图, 在正方体  $ABCD-A_1B_1C_1D_1$  中,  $E, F$  是底面正方形  $ABCD$  四边上的两个不同的动点, 过点

$D_1, E, F$  的平面记为  $\alpha$ , 则 (▲)

- A.  $\alpha$  截正方体的截面可能是正五边形  
 B. 当  $E, F$  分别是  $AB, BC$  的中点时,  $\alpha$  分正方体两部分的体积  $V_1, V_2$  ( $V_1 < V_2$ ) 之比是 25:47  
 C. 当  $E, F$  分别是  $AD, AB$  的中点时,  $A_1B_1$  上存在点  $P$  使得  $AP \perp \alpha$   
 D. 当  $F$  是  $BC$  中点时, 满足  $|ED_1| = 2|EF|$  的点  $E$  有且只有 2 个



三、填空题：本大题共4小题，每小题5分，若两个空，第一个空2分，第二个空3分，共计20分。请把答案填写在答题卡相应位置上。

13. 已知双曲线  $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的右焦点为  $F$ ，右顶点为  $A$ ，以坐标原点  $O$  为圆心，过点  $A$  的圆与双曲线  $C$  的一条渐近线交于位于第一象限的点  $P$ ，若直线  $PF$  的斜率为  $-3$ ，则  $C$  的离心率为     ▲    。
14. 已知  $\tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha} = 4$ ，则  $\cos^2(\alpha + \frac{\pi}{4}) =$      ▲    。
15. 已知函数  $f(x) = 3 \ln x + ax - 2ax^2$ ，若存在唯一的整数  $x_0$ ，使得  $f(x_0) > 0$ ，则实数  $a$  的取值范围是     ▲    。
16. 意大利数学家斐波那契在研究兔子繁殖问题时发现了数列  $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$ ，数列中的每一项被称为斐波那契数，用符号  $F(n) (n \in \mathbb{N}^*)$  表示，已知  $F(1) = 1, F(2) = 1, F(n) = F(n-1) + F(n-2) (n \geq 3)$ 。
- (1) 若  $F^2(5) + F^2(6) = F(n)$ ，则  $n =$      ▲    。
- (2) 若  $F(2022) = a$ ，则  $F(1) + F(2) + \dots + F(2020) =$      ▲    。（结果用含  $a$  的字母表示）

四、解答题：本大题共6小题，共计70分。请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分10分)

在数列  $\{a_n\}$  中， $a_1 = \frac{1}{3}$ ， $a_n - a_{n+1} = 2a_{n+1}a_n (n \in \mathbb{N}^*)$ 。

(1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式；

(2) 求满足不等式  $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_k a_{k+1} < \frac{1}{7} (k \in \mathbb{N}^*)$  成立的  $k$  的最大值。

18. (本小题满分12分)

已知圆  $C$  的圆心在直线  $x + y - 1 = 0$  上，且与直线  $2x - y = 0$  相切于点  $(0, 0)$ 。

(1) 求圆  $C$  的方程；

(2) 直线  $l$  过点  $P(3, -3)$ ，且与圆  $C$  相交，所得弦长为4，求直线  $l$  的方程。

19. (本小题满分12分)

在①  $c = 4$ ；②  $a \sin B = b \cos(A - \frac{\pi}{6})$  这两个条件中任选一个作为已知条件，补充到下面的横线上，并给出解答。

问题：已知  $\triangle ABC$  中，角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ ， $D$  是  $AC$  边的中点， $a = BD = \frac{4}{3}\sqrt{7}$ ，且         。

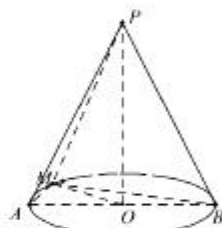
(1) 求  $b$  的值； (2) 若  $\angle BAC$  的平分线交  $BC$  于点  $E$ ，求  $\triangle ABE$  的周长

注：如果选择多个条件分别解答，按第一个解答计分。

20. (本小题满分 12 分)

已知圆锥的顶点为  $P$ , 圆锥底面圆心为  $O$ ,  $AB$  是底面的一条直径且  $\frac{PO}{AO} = \sqrt{3}$ ,  $M$  为底面圆周上一动点 (不与  $A, B$  重合).

- (1) 设  $PB$  的中点为  $N$ , 求证:  $ON \parallel$  平面  $PAM$ ;
- (2) 二面角  $A-PM-B$  的大小是否可能为  $90^\circ$ ? 若是, 求  $M$  的位置; 若不是, 请说明理由.

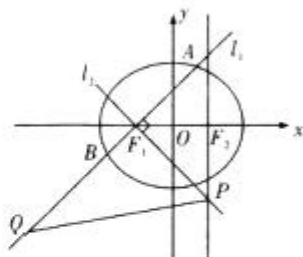


(第 20 题图)

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率  $e = \frac{1}{2}$ , 且经过点  $(1, \frac{3}{2})$ , 点  $F_1, F_2$  为椭圆  $C$  的左、右焦点.

- (1) 求椭圆  $C$  的方程;
- (2) 过点  $F_1$  分别作两条互相垂直的直线  $l_1, l_2$ , 且  $l_1$  与椭圆交于不同两点  $A, B$ ,  $l_2$  与直线  $x=1$  交于点  $P$ . 若  $\overrightarrow{AF_1} = \lambda \overrightarrow{F_1B}$ , 且点  $Q$  满足  $\overrightarrow{QA} = \lambda \overrightarrow{QB}$ , 求  $\triangle PQF_1$  面积的最小值.



(第 21 题图)

22. (本小题满分 12 分)

设  $a \geq 0$ , 函数  $f(x) = (x+1)\ln x + (a-2)x + 2$ .

- (1) 求证:  $f(x)$  存在唯一零点  $x_0$ ;
- (2) 在 (1) 的结论下, 若  $x_1 + a = \sin x_1$ , 求证:  $x_1 - \ln x_0 \leq 0$ .

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

