

大联考雅礼中学 2024 届高三月考试卷(一)

数 学

命题人:黄爱民 审题人:黄文辉

得分: _____

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,共 8 页,时量 120 分钟,满分 150 分.

第 I 卷

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 若集合 $M = \{x | \log_2 x < 4\}$, $N = \{x | 2x \geq 1\}$, 则 $M \cap N =$

- A. $\{x | 0 \leq x < 8\}$ B. $\{x | \frac{1}{2} \leq x < 8\}$
C. $\{x | 2 \leq x < 16\}$ D. $\{x | \frac{1}{2} \leq x < 16\}$

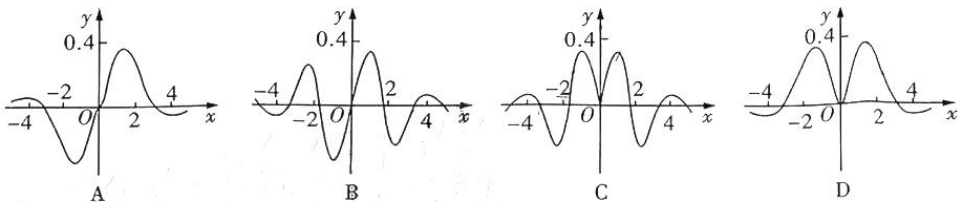
2. 记等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n . 若 $a_6 = 16$, $S_5 = 35$, 则数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d =$

- A. 3 B. 2 C. -2 D. -3

3. 已知复数 z_1, z_2 是关于 x 的方程 $x^2 - 2x + 2 = 0$ 的两个根. 若 $z_1 = 1 + i$, 则 $|z_2| =$

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. 1 C. $\sqrt{2}$ D. 2

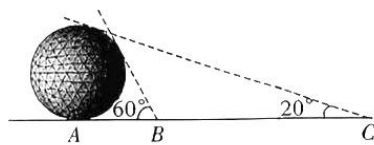
4. 函数 $y = \frac{x \sin x}{e^{|x|}}$ 的图象大致为



5. 已知 $2x^2 + kx - m < 0$ 的解集为 $(t, -1)$ ($t < -1$), 则 $k + m$ 的值为

- A. 1 B. 2 C. -1 D. -2

6. 古代数学家刘徽编撰的《重差》是中国最早的一部测量学著作,也为地图学提供了数学基础. 现根据刘徽的《重差》测量一个球



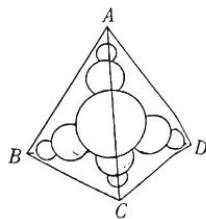
体建筑物的高度,已知点 A 是球体建筑物与水平地面的接触点(切点),地面上 B, C 两点与点 A 在同一条直线上,且在点 A 的同侧.若在 B, C 处分别测得球体建筑物的最大仰角为 60° 和 20° ,且 $BC=100$ m,则该球体建筑物的高度约为($\cos 10^\circ \approx 0.985$)

- A. 49.25 m B. 50.76 m
C. 56.74 m D. 58.60 m

7. 已知定义域是 \mathbf{R} 的函数 $f(x)$ 满足: $\forall x \in \mathbf{R}, f(4+x) + f(-x) = 0$, $f(1+x)$ 为偶函数, $f(1) = 1$, 则 $f(2023) =$

- A. -1 B. 1 C. 2 D. -3

8. 如今中国被誉为基建狂魔, 可谓是逢山开路, 遇水架桥. 公路里程、高铁里程双双都是世界第一, 建设过程中研制出用于基建的大型龙门吊、平衡盾构机等国之重器更是世界领先. 如图是某重器上一零件结构模型,



中间最大球为正四面体 $ABCD$ 的内切球, 中等球与最大球和正四面体三个面均相切, 最小球与中等球和正四面体三个面均相切, 已知正四面体 $ABCD$ 棱长为 $2\sqrt{6}$, 则模型中九个球的表面积和为

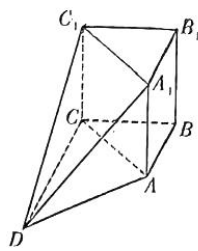
- A. 6π B. $\frac{31\pi}{4}$ C. 9π D. 21π

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 下列命题为真命题的是

- A. 若 $\sin 2\alpha = \frac{2}{3}$, 则 $\cos^2(\alpha + \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{6}$
 B. 函数 $f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度得到函数 $g(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{6})$ 的图象
 C. 函数 $f(x) = 2\sin x \cos x + \cos(2x - \frac{\pi}{6})$ 的单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{6} + k\pi, \frac{\pi}{6} + k\pi]$ ($k \in \mathbf{Z}$)
 D. $f(x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$ 的最小正周期为 $\frac{\pi}{2}$

10. 如图所示, 该几何体由一个直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 和一个四棱锥 $D-ACC_1A_1$ 组成, $AB=BC=AC=AA_1=2$, 则下列说法正确的是



- A. 若 $AD \perp AC$, 则 $AD \perp A_1C$
 B. 若平面 A_1C_1D 与平面 ACD 的交线为 l , 则 $AC \parallel l$
 C. 三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的外接球的表面积为 $\frac{14\pi}{3}$
 D. 当该几何体有外接球时, 点 D 到平面 ACC_1A_1 的最大距离为 $\frac{\sqrt{21}-\sqrt{3}}{3}$

11. 自然下垂的铁链; 空旷的田野上, 两根电线杆之间的电线; 峡谷的上空, 横跨深涧的观光索道的钢索. 这些现象中都有相似的曲线形态. 事实上, 这些曲线在数学上常常被称为悬链线. 悬链线的相关理论在工程、航海、光学等方面有广泛的应用. 在恰当的坐标系中, 这类函数的表达式可以为 $f(x) = ae^x + be^{-x}$ (其中 a, b 是非零常数, 自然对数的底数 $e = 2.71828\cdots$), 对于函数 $f(x)$, 以下结论正确的是

- A. $a=b$ 是函数 $f(x)$ 为偶函数的充分不必要条件
 B. $a+b=0$ 是函数 $f(x)$ 为奇函数的充要条件
 C. 如果 $ab < 0$, 那么 $f(x)$ 为单调函数
 D. 如果 $ab > 0$, 那么函数 $f(x)$ 存在极值点

12. 设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 其前 n 项和为 S_n , 前 n 项积为 T_n , 且满足条件 $a_1 > 1, a_{2022} \cdot a_{2023} > 1, (a_{2022} - 1) \cdot (a_{2023} - 1) < 0$, 则下列选项正确的是

- A. $\{a_n\}$ 为递减数列
 B. $S_{2022} + 1 < S_{2023}$
 C. T_{2022} 是数列 $\{T_n\}$ 中的最大项
 D. $T_{4045} > 1$

答题卡

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	得分
答案													

第 II 卷

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知 $a = (-2, \lambda), b = (3, 1)$, 若 $(a+b) \perp b$, 则 $|a| =$ _____.

14. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{5}{2}\right)^x - 1, & x \leq 2, \\ 4 - x, & x > 2, \end{cases}$ 则函数 $g(x) = f(x) - \sqrt{x}$ 的零点个数为_____.

15. 已知正方体的棱长为 1, 每条棱所在直线与平面 α 所成的角都相等, 则平面 α 截此正方体所得截面面积的最大值为_____.

16. 如图 1 所示, 古筝有多根弦, 每根弦下有一个雁柱, 雁柱用于调整音高和音质. 图 2 是根据图 1 绘制的古筝弦及其雁柱的简易平面图. 在图 2 中, 每根弦都垂直于 x 轴, 相邻两根弦间的距离为 1, 雁柱所在曲线的方程为 $y = 1.1^x$, 第 n 根弦 ($n \in \mathbf{N}$, 从左数首根弦在 y 轴上, 称为第 0 根弦) 分别与雁柱曲线和直线 $l: y = x + 1$ 交于点 $A_n(x_n, y_n)$ 和 $B_n(x'_n, y'_n)$, 则 $\sum_{n=0}^{20} y_n y'_n =$ _____ . (参考数据: 取 $1.1^{22} = 8.14$.)



图1

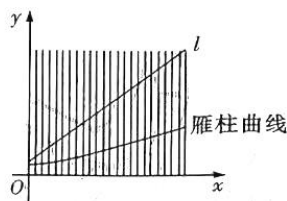


图2

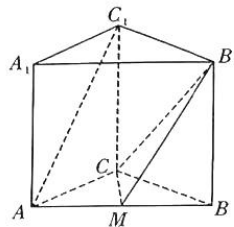
四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 请在答题卡指定区域内作答. 解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

如图, 在直三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $CA = CB = 2, AB = 2\sqrt{2}, AA_1 = 3$, M 为 AB 的中点.

(1) 证明: $AC_1 \parallel$ 平面 B_1CM ;

(2) 求点 A 到平面 B_1CM 的距离.



18. (本小题满分 12 分)

记锐角 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\frac{\sin(A-B)}{\cos B} = \frac{\sin(A-C)}{\cos C}$.

(1) 求证: $B=C$;

(2) 若 $a \sin C=1$, 求 $\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ 的最大值.

19. (本小题满分 12 分)

甲、乙足球爱好者为了提高球技, 两人轮流进行点球训练(每人各踢一次为一轮), 在相同的条件下, 每轮甲、乙两人在同一位置, 一人踢球另一人扑球, 甲先踢, 每人踢一次球, 两人有 1 人进球另一人不进球, 进球者得 1 分, 不进球者得 -1 分; 两人都进球或都不进球, 两人都得 0 分; 设甲、乙每次踢球命中的概率均为 $\frac{1}{2}$, 甲扑到乙踢出球的概率为 $\frac{1}{2}$, 乙扑到甲踢出球的概率 $\frac{1}{3}$, 且各次踢球互不影响.

(1) 经过 1 轮踢球, 记甲的得分为 X , 求 X 的分布列及数学期望;

(2) 求经过 3 轮踢球累计得分后, 甲得分高于乙得分的概率.

20. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=0, a_{n+1}=2a_n+n(n \in \mathbb{N}^*)$.

(1) 令 $b_n = a_{n+1} - a_n + 1$, 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是等比数列;

(2) 令 $c_n = \frac{a_n}{3^n}$, 当 c_n 取得最大值时, 求 n 的值.

41. (本小题满分 12 分)

已知双曲线 $E: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦距为 10, 且经过点

$M(8, 3\sqrt{3})$. 点 A, B 为双曲线 E 的左、右顶点, 点 P 为直线 $x=2$ 上的动点, 连接 PA, PB 交双曲线 E 于点 C, D (不同于点 A, B).

(1) 求双曲线 E 的标准方程;

(2) 直线 CD 是否过定点? 若过定点, 求出定点坐标; 若不过定点, 请说明理由.

22. (本小题满分 12 分)

设函数 $f(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} (x \geq 0)$.

(1) 求 $f(x)$ 的最值;

(2) 令 $g(x) = \sin x$, $g(x)$ 的图象上有一点列 $A_i(\frac{1}{2^i}, g(\frac{1}{2^i})) (i=1, 2, \dots, n, n \in \mathbf{N}^*)$, 若直线 $A_i A_{i+1}$ 的斜率为 $k_i (i=1, 2, \dots, n-1)$, 证明:

$$k_1 + k_2 + \dots + k_{n-1} > n - \frac{7}{6}.$$

@高考直通车PP
海量高清试题免费下载

@高考直通车PP
海量高清试题免费下载

@高考直通车PP
海量高清试题免费下载

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线