

2023 年湖北新高考协作体高一 5 月联考

数学试卷

命题学校：孝感高中

命题老师：高一数学组

审题学校：黄石二中

考试时间：2023 年 5 月 29 日下午 15:00-17:00

试卷满分：150 分

注意事项：

- 1、答卷前，考生务必将自己的姓名、考号等填写在答题卡和试卷指定的位置上。
- 2、回答选择题时，选出每题答案后，用 2B 铅笔把答题卡对应题目的答案标号涂黑。如需要改动，先用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在试卷上无效。

一、单项选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | 1 \leq x < 4\}$, $B = \{x | y = \ln(x^2 - 2x - 3)\}$, 则 $A \cap B$ 等于 ()
 A. $(3, 4]$ B. $(-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$ C. $(3, 4)$ D. $(-\infty, -1] \cup (4, +\infty)$
2. 已知点 $P(1, 2)$ 在角 α 的终边上，那么 $\cos 2\alpha$ 的值是 ()
 A. $-\frac{3}{5}$ B. $\frac{3}{5}$ C. $-\frac{4}{5}$ D. $\frac{4}{5}$
3. 设 l, m, n 均为直线，其中 m, n 在平面 α 内，则“ $l \perp m$ 且 $l \perp n$ ”是“ $l \perp \alpha$ ”的 ()
 A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 已知 $\triangle ABC$ 的三个角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，若 $a \sin B \cos C + c \sin B \cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}b$ ，且 $a > b$ ，则 $B =$ ()
 A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{6}$
5. 在正方形 $ABCD$ 中，已知 $AB = 1$ ，点 P 在射线 CD 上运动，则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ 的取值范围为 ()
 A. $[0, 1]$ B. $[1, +\infty)$ C. $[\frac{3}{4}, 1]$ D. $[\frac{3}{4}, +\infty)$
6. 已知复数 z 的实部和虚部均为自然数，在复平面内 z 对应的点为 Z ，那么满足 $2 \leq |z| \leq 3$ 的点 Z 的个数为 ()
 A. 5 B. 6 C. 7 D. 8
7. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点在球 O 的球面上， $PA = PB = PC$ ， $\triangle ABC$ 是边长为 2 的正三角形， E, F 分别是 PA, AB 的中点， $EF \perp$ 平面 PAC ，则球 O 的体积为 ()
 A. $\frac{\sqrt{6}\pi}{8}$ B. $\frac{\sqrt{6}\pi}{4}$ C. $\frac{\sqrt{6}\pi}{2}$ D. $\sqrt{6}\pi$

8. 定义: 若 $f(x) = \begin{cases} g(x), & 1 \leq x < k \\ kf(\frac{x}{k}), & x \geq k \end{cases}$, 则称 $f(x)$ 是函数 $g(x)$ 的 k 倍伸缩仿周期函数。设 $g(x) = \sin(\pi x)$,

且 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的 2 倍伸缩仿周期函数。若对于任意的 $x \in [1, m]$, 都有 $f(x) \geq -8$, 则实数 m 的最大值为 ()

- A. 12 B. $\frac{56}{3}$ C. $\frac{64}{3}$ D. $\frac{88}{3}$

二、多项选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 若复数 x_1, x_2 是关于 x 的方程 $x^2 + 4x + 5 = 0$ 的两个根, 则下列说法正确的是 ()

- A. $x_1 + x_2 = -4$ B. $x_1 + x_2 = -4i$ C. $x_1 x_2 = 5$ D. $x_1 x_2 = 5i$

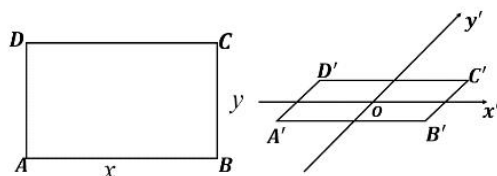
10. 已知一个矩形 $ABCD$, 用斜二测画法得到其直观图 $A'B'C'D'$ 的周长为 2, 设 $AB = x, BC = y$, 下列说法正确的是 ()

- A. xy 的最大值为 1

- B. $\frac{1}{x} + \frac{1}{2y}$ 的最小值为 $\frac{9}{4}$

- C. $\sqrt{2x} + \sqrt{y}$ 的最大值为 2

- D. $xy + x + y$ 的最大值为 $\frac{17}{8}$



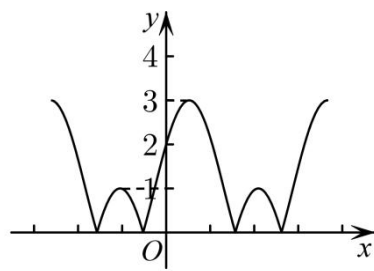
11. 已知函数 $f(x) = A \cos(2x + \varphi) - 1$ ($A > 0, 0 < \varphi < \pi$), 若函数 $y = |f(x)|$ 的部分图象如图所示, 函数 $g(x) = A \sin(Ax - \varphi)$, 则下列结论不正确的是 ()

- A. 将函数 $y = f(x) + 1$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度可得到函数 $g(x)$ 的图象

- B. 函数 $y = g(x)$ 的图象关于点 $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ 对称

- C. 函数 $g(x)$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的单调递减区间为 $[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{2}]$

- D. 若函数 $g(x + \theta)$ ($\theta \geq 0$) 为偶函数, 则 θ 的最小值为 $\frac{7}{12}\pi$



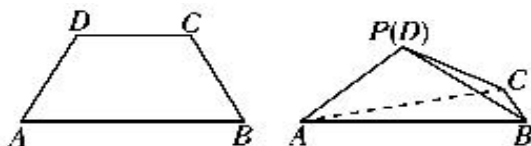
12. 如图, 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel CD$, $AB = 2CD = 2AD = 2$. 将 $\triangle ACD$ 沿着 AC 翻折, 使得点 D 到点 P , 且 $AP \perp BC$. 下列结论正确的是 ()

- A. 平面 $APC \perp$ 平面 ABC

- B. 二面角 $P-AB-C$ 的大小为 45°

- C. 三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的表面积为 5π

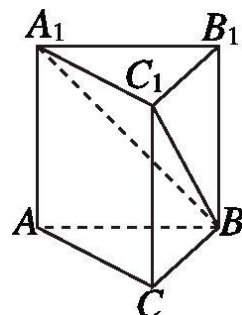
- D. 点 C 到平面 APB 的距离为 $\frac{\sqrt{21}}{7}$



三、填空题：共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

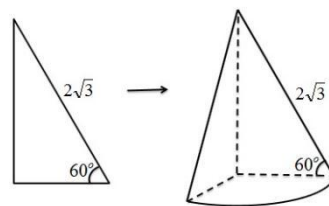
13. 已知 $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{5}$, $\vec{b} = (1, 2)$, 且 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 则非零向量 $\vec{a}$ 的坐标为_____.

14. 在《九章算术》中, 堑堵指底面为直角三角形, 且侧棱垂直于底面的三棱柱, 阳马指底面为矩形, 一条侧棱垂直于底面的四棱锥. 如图, 在堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, $AC \perp BC$, $AA_1 = AB = 2\sqrt{2}$, 则当堑堵 $ABC-A_1B_1C_1$ 的体积最大时, 阳马 $B-A_1ACC_1$ 的体积为_____.



15. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $AB = 2$, $AC = 5$, $\angle BAC = 60^\circ$, P 是 $\triangle ABC$ 的外心, 则 $\angle APB$ 的余弦值为_____.

16. 农历五月初五是端午节. 这一天民间有吃粽子的习俗, 据说是为了纪念战国时期楚国大臣、爱国诗人屈原. 粽子的形状有多种. 今有某种粽子类似于由一个直角三角形绕它的一条直角边旋转 $\frac{\pi}{2}$ (如图) 而成. 如果粽子的馅可以看成是这个几何体内的一个球状物, 则粽子馅的最大体积为_____.



四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分) 已知向量 $\vec{a} = 3\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2$, $\vec{b} = 4\vec{e}_1 + k\vec{e}_2$, 其中 $\vec{e}_1 = (1, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1)$.

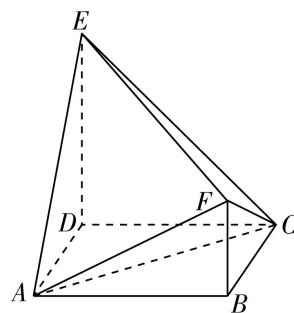
(1) 若 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 求实数 k 的值;

(2) 若 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为锐角, 求实数 k 的取值范围.

18. (12 分) 如图, 四边形 $ABCD$ 为正方形, $ED \perp$ 平面 $ABCD$, $FB \parallel ED$, $AB = ED = 2FB$.

(1) 证明: $EA \parallel$ 平面 BCF ;

(2) 证明: 平面 $EAC \perp$ 平面 FAC .



19. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A , B , C 的对边分别为 a , b , c , 已知 $b = \sqrt{3}$, $c = 3$, 且 $2B = C$. $\angle BAC$ 的平分线交 BC 于点 E .

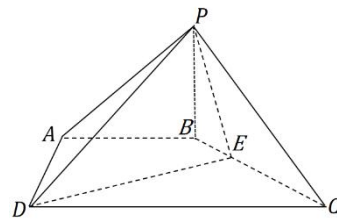
(1) 求角 C ;

(2) 求 $\triangle ABE$ 的面积.

20. (12 分) 如图所示, 四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为直角梯形, $\overline{DC} = 2\overline{AB}$, $\angle DAB = \angle ADC = 90^\circ$, $PB \perp$ 底面 $ABCD$, $PB = AB = AD$.

(1) 求证: $PD \perp BC$;

(2) 线段 BC 上是否存在点 E , 使得平面 $PAD \perp$ 平面 PDE ? 若存在, 求直线 PE 与平面 PAD 所成角的正弦值; 若不存在, 请说明理由.



21. (12 分) 已知 $f(x) = \cos x(2\sqrt{3}\sin x + \cos x) - \sin^2 x$.

(1) 若 $f(x) = \frac{1}{2}$, 求 $\sin\left(4x + \frac{5\pi}{6}\right)$ 的值;

(2) 将函数 $f(x)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位得到函数 $y = h(x)$ 的图象, 若函数 $y = h(x) + k(\sin x + \cos x) + 5$

在 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上有 4 个零点, 求实数 k 的取值范围.

22. (12 分) 函数 $y = f(x)$ 的图象关于坐标原点成中心对称图形的充要条件是函数 $y = f(x)$ 为奇函数, 有同学发现可以将其推广为: 函数 $y = f(x)$ 的图象关于点 $P(a, b)$ 成中心对称图形的充要条件是函数 $y = f(x+a) - b$ 为奇函数. 已知函数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$.

(1) 若函数 $y = f(x)$ 的对称中心为 $(-1, 2)$, 求函数 $y = f(x)$ 的解析式.

(2) 由代数基本定理可以得到: 任何一元 $n(n \in \mathbf{N}^*)$ 次复系数多项式 $f(x)$ 在复数集内可以分解为 n 个一次因式的乘积. 进而, 一元 n 次多项式方程有 n 个复数根 (重根按重数计). 如设实系数一元二次方程 $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0 (a_2 \neq 0)$, 在复数集内的根为 x_1, x_2 , 则方程 $a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ 可变形为 $a_2(x - x_1)(x - x_2) = 0$, 展开得: $a_2x^2 - a_2(x_1x_2)x + a_2x_1x_2 = 0$.

$$\text{则有 } \begin{cases} a_1 = -a_2(x_1 + x_2) \\ a_0 = a_2x_1x_2 \end{cases} \quad \text{即} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2} \\ x_1x_2 = \frac{a_0}{a_2} \end{cases}.$$

类比上述推理方法可得实系数一元三次方程根与系数的关系.

① 若 $a = 0$, 方程 $f(x) = k$ 在复数集内的根为 x_1, x_2, x_3 , 当 $k \in [0, 1]$ 时, 求 $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ 的最大值;

② 若 $a = -3, b = -2$, 函数 $y = f(x)$ 的零点分别为 x_1, x_2, x_3 , 求 $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2}$ 的值.