贵州省2021年普通高等学校招生适应性测试

文科数学

注意事项：

1. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。
3. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：本大题共12小题，每小题5分，共60分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A=\{-1,0,1,2\}$，集合 $B=\{x\,|\,y=\sqrt{x}\}$，则 $A\cap B=$

A. $\varnothing$　　B. $\{0,1\}$　　C. $\{1,2\}$　　D. $\{0,1,2\}$

2. 已知i为虚数单位，复数 $z=\dfrac{5}{2-\mathrm{i}}$ 的虚部为

A. 1　　B. 2　　C. i　　D. 2i

3. 小明处理一组数据，漏掉了一个数10，计算得平均数为10，方差为2．加上这个数后的这组数据

A. 平均数等于10，方差等于2　　B. 平均数等于10，方差小于2

C. 平均数大于10，方差小于2　　D. 平均数小于10，方差大于2

4. 2020年3月，中共中央 国务院印发了《关于全面加强新时代大中小学劳动教育的意见》，提出“把劳动教育纳入人才培养全过程，贯通大中小学各学段，贯穿家庭、学校、社会各方面，与德育、智育、体育、美育相融合，紧密结合经济社会发展变化和学生生活实际，积极探索具有中国特色的劳动教育模式”．贵州省某学校结合自身实际，推出了《职业认知》《家政课程》《田地教育》《手工制作》《种植技术》五门劳动课程，要求学生从中任选两门进行学习，经考核合格后方能获得相应学分．已知甲、乙两人都选了《职业认知》，则另外一门课程不相同的概率为

A. $\dfrac{1}{5}$　　B. $\dfrac{4}{5}$　　C. $\dfrac{1}{4}$　　D. $\dfrac{3}{4}$

5. 设 $a=\log_3 7$，$b=3^{-0.2}$，$c=(\frac{1}{3})^{2.1}$，则 a，b，c 的大小关系是

A. $a<b<c$　　　　B. $b<a<c$

C. $c<b<a$　　　　D. $b<c<a$

6. 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,-1)$，$\boldsymbol{b}=(2,\ x)$．若 $\boldsymbol{a}\perp(2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$，则 x 的值为

A. 2　　　　B. -2　　　　C. 6　　　　D. -6

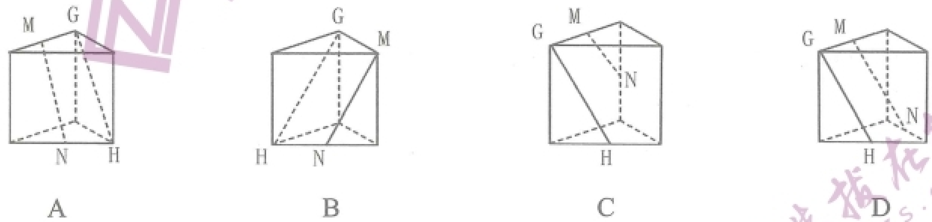
7. 双曲线 C：$x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的一条渐近线与抛物线 M：$y^2=4x$ 的一个交点为 P（异于坐标原点 O）．M 的焦点为 F，则 $\triangle OFP$ 的面积为

A. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$　　　　B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$　　　　C. $\frac{2}{3}$　　　　D. $\frac{4}{3}$

8. 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=5$，$a_2=9$．若数列 $\{a_n+n^2\}$ 是等差数列，则 $\{a_n\}$ 的最大项为

A. 9　　　　B. 11　　　　C. $\frac{45}{4}$　　　　D. 12

9. 如图，G，H，M，N 分别是直三棱柱的顶点或所在棱的中点，则在下列图形中 $GH//MN$ 的是

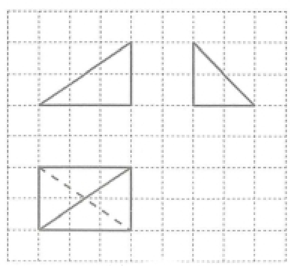


10. 若关于 x 的方程 $\sqrt{3}\cos x=a+\sin x$ 在区间 $[0,\ \pi]$ 上有两个不等的实根，则实数 a 的取值范围为

A. $(-2,-1]$　　　　B. $[1,2)$

C. $(-2,-\sqrt{3}]$　　　　D. $[\sqrt{3},2)$

11. 如图，网格纸上小正方形的边长为 1，粗线是某几何体的三视图，则该几何体的各个面中最大面积为



A. 6　　　　B. $\sqrt{22}$

C. $3\sqrt{2}$　　　　D. $\sqrt{13}$

12. 已知函数 $f(x)=\dfrac{x^2+4x+1}{x^2+1}$，有如下四个结论：

①函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0,1)$ 对称；

②函数 $f(\tan x)$ 的图象的一条对称轴为 $x=\dfrac{\pi}{4}$；

③ $\forall x\in\mathbf{R}$，都有 $m\geqslant f(x)$，则 m 的最小值为 3；

④ $\exists x_0\in\mathbf{R}$，使得 $m\leqslant f(x_0)$，则 m 的最大值为 -1.

其中所有正确结论的编号是

A. ①②　　　　B. ①③

C. ①④　　　　D. ②③

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 若 x，y 满足约束条件 $\begin{cases}x+y\geqslant 0,\\ x-y\geqslant 0,\\ x\leqslant 1,\end{cases}$ 则 $z=2x-y$ 的最大值为________.

14. 已知函数 $f(x)=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}+1$，若 $f(a)=3$，则 $f(-a)=$________.

15. 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_2=2$，其前 n 项和 S_n 满足 $S_n\cdot S_{n+2}=S_{n+1}^2$，则 $\{a_n\}$ 的通项公式为________________.

16. 过圆 O：$x^2+y^2=r^2$ 外一点 $P(x_0,y_0)$ 作圆 O 的切线，切点分别为 A，B，我们可以把线段 AB 叫做圆 O 的切点弦，其所在直线方程为 $x_0x+y_0y=r^2$.

现过点 $P(1,3)$ 作圆 O：$x^2+y^2=4$ 的切线，切点分别为 A，B，则切点弦 AB 所在直线的方程为________________；若点 Q 是直线 l：$x-y-4=0$ 上的动点，过点 Q 作圆 O：$x^2+y^2=4$ 的切线，切点分别为 A，B，则切点弦 AB 所在直线恒过定点________.

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

（一）必考题：共 60 分。

17.（12 分）

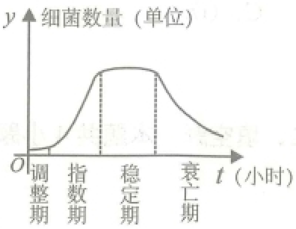
$\triangle ABC$ 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c. 已知 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$，$A=\frac{\pi}{3}$.

（1）若 $2\sin C=3\sin B$，求 a；

（2）若 D 为 BC 边的中点，求线段 AD 长的最小值.

18.（12 分）

如图，在实验室细菌培养过程中，细菌生长主要经历调整期、指数期、稳定期和衰亡期四个时期. 在一定条件下，培养基上细菌的最大承载量（达到稳定期时的细菌数量）与培养基质量具有线性相关关系. 某实验室在培养细菌 A 的过程中，通过大量实验获得了以下统计数据：



培养基质量 x（克）	20	40	50	60	80
细菌 A 的最大承载量 Y（单位）	300	400	500	600	700

（1）建立 Y 关于 x 的回归直线方程，并预测当培养基质量为 100 克时细菌 A 的最大承载量；

（2）研究发现，细菌 A 的调整期一般为 3 小时，其在指数期的细菌数量 y（单位）与细菌 A 被植入培养基的时间 t 近似满足函数关系 $y=0.8\times 2^{t-3}+20$，试估计在 100 克培养基上培养细菌 A 时指数期的持续时间（精确到 1 小时）.

附注：

参考数据：$2^{10}=1024$，$2^{11}=2048$，$2^{12}=4096$，$2^{13}=8192$.

参考公式：回归方程 $\hat{Y}=\hat{b}x+\hat{a}$ 中斜率和截距的最小二乘估计公式分别为：

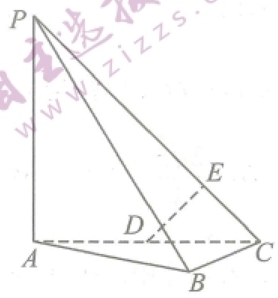
$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_iY_i-n\bar{x}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\bar{x}^2},\quad \hat{a}=\bar{Y}-\hat{b}\bar{x}$$

19.（12 分）

三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=4$，$AB=2\sqrt{3}$，$BC=2$，$PA\perp$平面 ABC，$AB\perp BC$，D 为 AC 中点，点 E 在棱 PC 上（端点除外）．过直线 DE 的平面 α 与平面 PAB 垂直，平面 α 与此三棱锥的面相交，交线围成一个四边形．

（1）在图中画出这个四边形，并写出作法（不要求证明）；

（2）若 $PE=3EC$，求点 C 到平面 α 的距离．



20.（12 分）

已知函数 $f(x)=x+1-xe^x$．

（1）求曲线 $y=f(x)$ 在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程；

（2）判断 $f(x)$ 是否有零点．若有，求出零点个数；若没有，请说明理由．

21.（12 分）

已知 $F_1(-1,0)$，$F_2(1,0)$ 是椭圆 E：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左、右焦点，P 是 E 上一点，$PF_1\perp PF_2$，$\triangle F_1PF_2$ 的面积为 3．

（1）求椭圆 E 的标准方程；

（2）过 F_2 作两条互相垂直的直线与 E 分别交于 A，B 和 C，D，若 M，N 分别为 AB 和 CD 的中点．证明：直线 MN 恒过定点，并求出定点坐标．

（二）选考题：共 10 分。请考生在第 22、23 题中任选一题作答。如果多做，则按所做的第一题计分。

22．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（10 分）

直角坐标系 xOy 中，以坐标原点为极点，以 x 轴正半轴为极轴，建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2=\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}$．

（1）曲线 C 与直线 l：$\theta=\dfrac{\pi}{4}(\rho\in\mathbf{R})$ 交于 A，B 两点，求 $|AB|$；

（2）曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases}x=r\cos\alpha,\\ y=r\sin\alpha,\end{cases}$（$r>0$，$\alpha$ 为参数），当 $\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 时，若 C 与 C_1 有两个交点，极坐标分别为 (ρ_1,θ_1)，(ρ_2,θ_2)，求 r 的取值范围，并证明 $\theta_1+\theta_2=\dfrac{\pi}{2}$．

23．[选修 4-5：不等式选讲]（10 分）

函数 $f(x)=|x|+|x-1|$ 的最小值为 m．

（1）求 m；

（2）设正实数 a，b，c 满足 $a+b+c=m$，证明：$ab+bc+ca\geqslant\sqrt{3abc}$．

贵州省 2021 年普通高等学校招生适应性测试

文科数学参考答案及评分参考

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	D	A	B	D	C	C	A	B	D	C	B	B

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

题号	13	14	15	16
答案	3	-1	$a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ 2\times 3^{n-2}, & n\geqslant 2.\end{cases}$	$x+3y-4=0$；$(1,-1)$

【说明】第 15 题：仅写成 $a_n=2\times 3^{n-2}$ 给 3 分；第 16 题：第一空 2 分，第二空 3 分.

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17．解：

（1）因为 $2\sin C=3\sin B$，由正弦定理得 $2c=3b$ ①

又 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，$A=\dfrac{\pi}{3}$，则 $\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$，即 $bc=6$ ② ……… 2 分

由①②联立解得 $\begin{cases}b=2,\\ c=3.\end{cases}$ 或 $\begin{cases}b=-2,\\ c=-3.\end{cases}$（舍） …………………… 4 分

由余弦定理得

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=4+9-2\times2\times3\times\frac{1}{2}=7$$

所以 $a=\sqrt{7}$． …………………… 6 分

（2）$AD=|\overrightarrow{AD}|=|\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC})^2}$ ……………………8 分

$=\sqrt{\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}^2}=\sqrt{\frac{c^2+bc+b^2}{4}}$ ……………………10 分

$\geqslant\sqrt{\frac{3bc}{4}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

当且仅当 $b=c=\sqrt{6}$ 时等号成立，所以 AD 最小值为 $\frac{3\sqrt{2}}{2}$. ………………1

18. 解：

（1）$\bar{x}=\frac{20+40+50+60+80}{5}=50$

$\bar{Y}=\frac{300+400+500+600+700}{5}=500$ ………………2 分

$\sum_{i=1}^{5}x_iY_i=20\times300+40\times400+50\times500+60\times600+80\times700=139000$

$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=400+1600+2500+3600+6400=14500$ ………………4 分

$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iY_i-5\bar{x}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\bar{x}^2}=\frac{139000-5\times50\times500}{14500-5\times50^2}=\frac{14000}{2000}=7$

$\hat{a}=\bar{Y}-\hat{b}\bar{x}=500-7\times50=150$

所以 Y 关于 x 的回归直线方程为 $\hat{Y}=7x+150$

当培养基质量为100克时 $\hat{Y}=7\times100+150=850$（单位）. ………………6 分

（2）在100克培养基上培养细菌 A 时，由（1）知最大承载量为850单位

又 $y=0.8\times2^{t-3}+20$

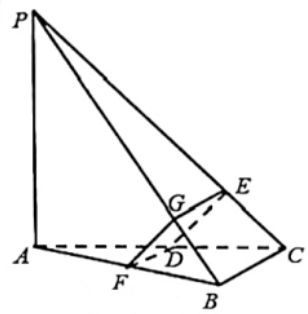
即 $850=0.8\times 2^{t-3}+20$ ……………………8 分

化简得 $2^{t-3}=1037.5$

$t-3\approx 10$ 即 $t\approx 13$

所以在100克培养基上培养细菌 A 时指数期的持续时间为10小时. …………12 分

19. 解：



(1) 作法：①过 D 作 $DF//BC$ 交 AB 于 F； ……………2 分

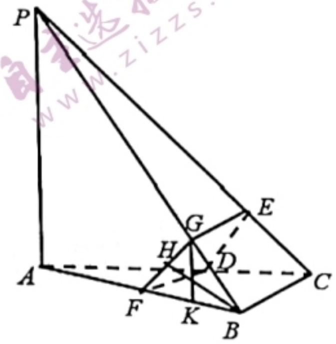
②过 E 作 $EG//BC$ 交 PB 于 G； ……………………4 分

③连接 FG，则四边形 $DFGE$ 为所作图形. ………5 分

(2) 由 (1) 知 $BC//\alpha$，所以点 C 到 α 的距离等于点 B 到 α 的距离…………7 分

过 B 作 $BH\perp FG$ 于 H，因为平面 $PAB\perp$ 平面 α，平面 $PAB\cap$ 平面 $\alpha=FG$

所以 $BH\perp\alpha$，从而点 B 到 α 的距离就是 BH 的长度.



计算得 $BF=\sqrt{3}$，$FG=BG=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

过 G 作 $GK\perp FB$ 于 K，则 $GK=1$

由 $S_{\Delta FGB}=\dfrac{1}{2}GF\cdot BH=\dfrac{1}{2}FB\cdot GK$ 得

$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{2}\cdot BH=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 1$，

解得 $BH=\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$

所以点 C 到平面 α 的距离为 $\dfrac{2\sqrt{21}}{7}$. ……………………12 分

20．解：

（1）$f(x)=x+1-xe^x$，$f'(x)=1-xe^x-e^x$，　　…………………… 2 分

又 $f'(0)=0, f(0)=1$

所以 $f(x)$ 在 $(0,f(0))$ 处的切线方程为 $y-f(0)=f'(0)(x-0)$ 即 $y=1$．

…………………… 5 分

（2）$f'(x)=1-xe^x-e^x=1-(x+1)e^x$

当 $x<-1$ 时，$x+1<0, 0<e^x<\frac{1}{e}$，有 $(x+1)e^x<1, f'(x)>0$

当 $-1<x<0$ 时，$0<x+1<1, \frac{1}{e}<e^x<1$，有 $(x+1)e^x<1, f'(x)>0$

当 $x>0$ 时，$x+1>1, e^x>1$ 有 $(x+1)e^x>1, f'(x)<0$

所以当 $x\in(-\infty,0)$ 时 $f'(x)>0$，$f(x)$ 为增函数

当 $x\in(0,+\infty)$ 时 $f'(x)<0$，$f(x)$ 为减函数　　……………… 10 分

又 $f(-2)=\frac{2}{e}-1<0, f(0)=1>0, f(1)=2-e<0$，又 $f(x)$ 在 **R** 上连续，

所以 $f(x)$ 有两个零点，分别位于区间 $(-2,0)$ 和区间 $(0,1)$ 内．　……………… 12 分

21. 解：

（1）由题得 $\begin{cases}|PF_1|^2+|PF_2|^2=4, \\ \frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=3, \\ |PF_1|+|PF_2|=2a,\end{cases}$ 则有 $4a^2=16$，

解得 $a=2$，

又 $a^2=b^2+c^2$，所以 $b=\sqrt{3}$

所以椭圆 E 的标准方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$．　　…………………… 5 分

（2）当直线 l_1 和 l_2 斜率存在时，设直线 l_1 方程为 $y=k(x-1)$，交椭圆 E 两点的坐标为

$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，由$\begin{cases} y=k(x-1), \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1, \end{cases}$ 得$(3+4k^2)x^2-8k^2x+4k^2-12=0$

于是$x_1+x_2=\dfrac{8k^2}{3+4k^2}$ ……………………………………7 分

所以 $M\ (\dfrac{4k^2}{3+4k^2},\dfrac{-3k}{3+4k^2})$

因为$l_1\perp l_2$，将上式中的k换成$-\dfrac{1}{k}$，同理可得 $N\ (\dfrac{4}{4+3k^2},\dfrac{3k}{4+3k^2})$

若$\dfrac{4k^2}{3+4k^2}\neq\dfrac{4}{4+3k^2}$即$k\neq\pm1$时，

$$k_{MN}=\frac{\dfrac{-3k}{3+4k^2}-\dfrac{3k}{4+3k^2}}{\dfrac{4k^2}{3+4k^2}-\dfrac{4}{4+3k^2}}=\frac{-21k^3-21k}{12(k^4-1)}=\frac{21}{12}\cdot\frac{-k}{k^2-1}=\frac{7}{4}\cdot\frac{-k}{k^2-1}$$

直线 MN 的方程为 $y-\dfrac{3k}{4+3k^2}=\dfrac{7}{4}\cdot\dfrac{-k}{k^2-1}(x-\dfrac{4}{4+3k^2})$

化简得 $y=\dfrac{7}{4}\cdot\dfrac{-k}{k^2-1}(x-\dfrac{4}{7})$，此时直线 MN 恒过定点$(\dfrac{4}{7},0)$ ……………………10 分

若$\dfrac{4k^2}{3+4k^2}=\dfrac{4}{4+3k^2}$即$k=\pm1$时，直线 MN 斜率不存在，易知直线也过点$(\dfrac{4}{7},0)$；

当直线l_1或l_2斜率不存在时，其中一条直线为$x=1$，另一条为$y=0$，直线 MN 过点$(\dfrac{4}{7},0)$；

综上所述：直线 MN 恒过定点$(\dfrac{4}{7},0)$. ……………………12 分

22. 解：

（1）联立方程 $\begin{cases}\rho^2=\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta},\\ \theta=\dfrac{\pi}{4}.\end{cases}$ ……………………2分

可得 $\rho^2=2$，

设 A，B 两点的极径分别为 ρ_A，ρ_B，则 $|AB|=|\rho_A-\rho_B|=2\sqrt{2}$.…………5分

（2）曲线 C_1：$\begin{cases}x=r\cos\alpha,\\ y=r\sin\alpha,\end{cases}$（$\alpha$ 为参数）转化为极坐标方程为 $\rho=r$

又 $\rho^2=\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}+\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}=\dfrac{2}{\sin 2\theta}$

所以 $r^2=\dfrac{2}{\sin 2\theta}$，由 $\theta\in(0,\dfrac{\pi}{2})$ 得 $2\theta\in(0,\pi)$，$\sin 2\theta\in(0,1]$

因为曲线 C 与 C_1 有两个交点，则 $r^2=\dfrac{2}{\sin 2\theta}>2$，所以 $r>\sqrt{2}$.…………8分

由题知 $\rho_1=\rho_2$，所以 $\dfrac{2}{\sin 2\theta_1}=\dfrac{2}{\sin 2\theta_2}$，即 $\sin 2\theta_1=\sin 2\theta_2$.

又 $\theta_1,\theta_2\in(0,\dfrac{\pi}{2}),\theta_1\neq\theta_2$，所以 $2\theta_1+2\theta_2=\pi$，即 $\theta_1+\theta_2=\dfrac{\pi}{2}$. …………10分

23.解：

（1）因为 $|x|+|x-1|\geqslant|x-(x-1)|=1$

又当且仅当 $x\in[0,1]$ 时，上式可以取“=”

所以函数 $y=f(x)$ 的最小值为 1，即 $m=1$. ……………………5分

（2）由（1）知 $m=1$，即 $a+b+c=1$.

因 $a^2b^2+b^2c^2\geqslant 2ab^2c$，$b^2c^2+c^2a^2\geqslant 2bc^2a$，$c^2a^2+a^2b^2\geqslant 2ca^2b$,

三式相加得 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2\geqslant abc$.

有 $a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2+2abc(a+b+c)\geqslant 3abc$,

即 $(ab+bc+ca)^2\geqslant 3abc$，故 $ab+bc+ca\geqslant\sqrt{3abc}$

（上述不等式中当且仅当 $a=b=c$ 时取“=”）. ……………………10分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

关注后获取更多资料：

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”,即可获取《高考考前必背知识点》