

中学生标准学术能力诊断性测试 2022 年 9 月测试

理科数学试卷

本试卷共 150 分，考试时间 120 分钟。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 3x < 0\}$, $B = \{x | x \geq a\}$, $A \subseteq B$, 则 a 的取值范围是

- A. $(-\infty, 0]$ B. $(-\infty, 3]$ C. $[0, +\infty)$ D. $[3, +\infty)$

2. 已知 $a \in \mathbf{R}$, 若 $a^2 - 1 + (a-1)i$ 是纯虚数 (i 是虚数单位), 则 $a =$

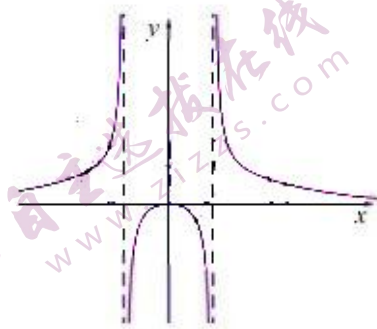
- A. -1 或 1 B. 0 C. -1 D. 0 或 1

3. 已知空间中 a, b 是两条不同的直线, α, β 是两个不同的平面, 则下列命题正确的是

- A. $a \perp \alpha, a \perp b \Rightarrow b \parallel \alpha$ B. $a \perp \alpha, b \perp \alpha \Rightarrow a \parallel b$
C. $a \subset \alpha, b \subset \beta, \alpha \parallel \beta \Rightarrow a$ 与 b 异面 D. $\beta \perp \alpha, \alpha \cap \beta = b, a \perp b \Rightarrow a \perp \beta$

4. 已知函数 $f(x)$ 的图象如图所示, 则它的解析式可能是

- A. $f(x) = \frac{x}{3^{|x|} - 3}$ B. $f(x) = \frac{x^2}{3^{|x|} - 3}$
C. $f(x) = \frac{x^2}{3^x - 3}$ D. $f(x) = \frac{x^2}{3^{|x|} + 3}$



(第 4 题图)

5. 若 $\tan\left(\alpha - \frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}$, 则 $\tan\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$ 的值为

- A. 3 B. $\frac{1}{3}$ C. -3 D. $-\frac{1}{3}$

6. 已知向量 $\vec{a} = (\sin^2 \theta, \cos \theta)$, $\vec{b} = (1 - \sin \theta, 2 \cos \theta)$, 且 $\theta \in [0, \pi]$, 则 “ $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ” 是 “ $\theta = \frac{\pi}{6}$ ” 的

- A. 充分不必要条件 B. 必要不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

7. 一个四棱锥的四个侧面中, 钝角三角形最多有

- A. 1个 B. 2个 C. 3个 D. 4个

8. 已知函数 $f(x) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin 2x$ 向左平移 θ 个单位后为偶函数, 其中 $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, 则 θ 的值为

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. $\frac{\pi}{3}$ C. $\frac{\pi}{4}$ D. $\frac{\pi}{6}$

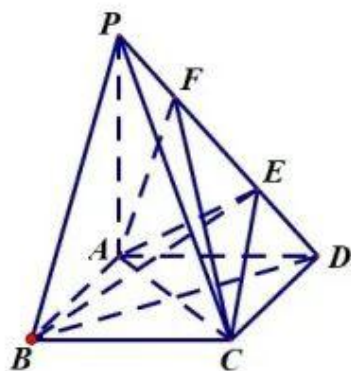
9. 如图所示, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 为正方形, $PA = AB = 1$,

E, F 为线段 PD 上的两个动点 (不包括端点), 且满足 $EF = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

以下结论正确的个数是

- (1) $AC \perp EF$;
(2) $PB \parallel$ 平面 AEC ;
(3) 二面角 $E-BD-C$ 的大小为定值;
(4) 四面体 $ACEF$ 的体积为定值.

- A. 4个 B. 3个 C. 2个 D. 1个



(第9题图)

10. 已知椭圆和双曲线有相同的焦点 F_1, F_2 , 它们的离心率分别为 e_1, e_2 , 点 P 为它们的一个交点, 且 $\angle F_1PF_2 = \frac{2\pi}{3}$, 则 $e_1^2 + e_2^2$ 的范围是

- A. $\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$ B. $\left[\frac{2+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$ C. $(2, +\infty)$ D. $(3, +\infty)$

11. 已知平面向量 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 满足 $\vec{a} \perp \vec{b}$, 且 $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 2$, $|\vec{c} + \vec{a} + \vec{b}| = 1$, 则 $|\vec{c} + \vec{b}| + 2|\vec{c} + \vec{a}|$ 的最小值为

- A. $\frac{\sqrt{15}}{2}$ B. $\sqrt{15}$ C. $\frac{\sqrt{17}}{2}$ D. $\sqrt{17}$

12. 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = a$, $a_{n+1} = 3a_n - a_n^2 - 1$, 则下列说法错误的是

- A. 若 $a \neq 1$ 且 $a \neq 2$, 数列 $\{a_n\}$ 单调递减
B. 若存在无数个自然数 n , 使得 $a_{n+1} = a_n$, 则 $a = 1$
C. 当 $a > 2$ 或 $a < 1$ 时, $\{a_n\}$ 的最小值不存在

D. 当 $a = 3$ 时, $\frac{1}{a_1-2} + \frac{1}{a_2-2} + \dots + \frac{1}{a_n-2} \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $(x+1)^2(2x-3)^3 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5$ ，则 $a_4 =$ _____.

14. 随机变量 ξ 的分布列如下表所示，则方差 $D(\xi)$ 的取值范围是_____.

ξ	0	1	2
P	$\frac{1}{3}$	a	b

15. 在平面直角坐标系中， $A(0,1)$ ， $B(0,2)$ ，若动点 C 在直线 $y=x$ 上，圆 M 过 A 、 B 、 C 三点，则圆 M 的面积最小值为_____.

16. 已知 $a > b > 0$ ， $\frac{1}{a} + \frac{4}{b} = 1$ ，则 $\frac{3}{a-2} + \frac{1}{b-4}$ 的最小值为_____.

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

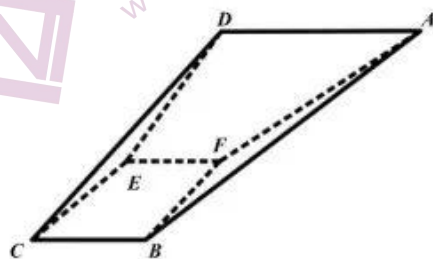
17. (12 分) 在 $\triangle ABC$ 中，角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c ，且 $\cos C - \sqrt{3} \sin C = \frac{a-2c}{b}$ 。

(1) 求角 B 的大小；

(2) 若 $b=2$ ，记 r 为 $\triangle ABC$ 的内切圆半径，求 r 的最大值。

18. (12 分) 如图所示，多面体 $ABCDEF$ 中， $AD \parallel EF \parallel BC$ ，平面 $ADEF \perp$ 平面 $BCEF$ ， $AD \perp EC$ ，且 $AD=CD=2$ ， $CB=EF=1$ ，

$$\angle BCD = \frac{\pi}{3}.$$



(第 18 题图)

(1) 证明： $BF \perp DE$ ；

(2) 若 $FB=\sqrt{2}$ ，求直线 DC 与平面 ABF 所成角的正弦值。

19. (12 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n 满足 $S_2 = 5$ ， $2S_n = 2n + na_n$ ， $n \in \mathbb{N}^*$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

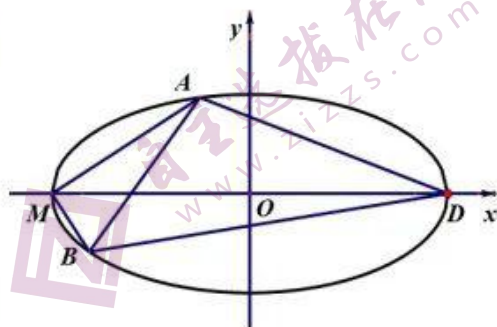
(2) 数列 $\{b_n\}, \{c_n\}$ 满足 $b_n = \frac{a_{n+1}^2}{(a_n+1)^2 - 1}$, 且 $c_n = b_1^n b_2^{n-1} \cdots b_{n-1}^2 b_n$, 求证: $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \cdots + \frac{1}{c_n} < 4$.

20. (12分) 如图所示, M, D 分别为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + y^2 = 1 (a > 1)$

的左、右顶点, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(1) 求椭圆的标准方程;

(2) 过 M 点作两条互相垂直的直线 MA, MB 与椭圆交于 A, B 两点, 求 $\triangle DAB$ 面积的最大值.



(第20题图)

21. (12分) 已知函数 $f(x) = e^x - ex$, $g(x) = 2ax - a - 1$, 其中 $a \in \mathbf{R}$, $e = 2.71828 \cdots$ 为自然对数的底数.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值;

(2) 设函数 $h(x) = f'(x) - g(x)$ ($f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数), 如果函数 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 内有两个不同的零点, 求实数 a 的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分. 作答时请写清题号.

22. (10分) [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

已知在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 3 \cos \theta \\ y = 2 \sin \theta \end{cases}$ (θ 为参数), 直线 l 经过定点 P

$(2, 1)$, 倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$.

(1) 写出直线 l 的参数方程和曲线 C 的标准方程;

(2) 设直线 l 与曲线 C 相交于 A, B 两点, 求 $|PA| \cdot |PB|$ 的值.

23. (10分) [选修 4-5: 不等式选讲]

已知 $a, b, c \in \mathbf{R}$, 且 $a^2 + b^2 + c^2 = 3$.

(1) 求证: $|a+b+c| \leq 3$;

(2) 若不等式 $|x-1| + |2x+1| \geq (a+b+c)^2$ 对一切实数 a, b, c 恒成

中学生标准学术能力诊断性测试 2022 年 9 月测试

理科数学参考答案

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
A	C	B	B	A	B	D	D	C	C	D	B

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. -20 14. $\left(\frac{2}{9}, \frac{8}{9}\right)$ 15. $\frac{\pi}{2}$ 16. $\frac{1}{4} + \sqrt{3}$

三、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。第 17~21 题为必考题，每个试题考生都必须作答。第 22、23 题为选考题，考生根据要求作答。

(一) 必考题：共 60 分。

17. (12 分)

(1) 解：∵ $\cos C - \sqrt{3} \sin C = \frac{a-2c}{b}$, ∴ $b \cos C - \sqrt{3} b \sin C = a - 2c$,

根据正弦定理： $\sin B \cos C - \sqrt{3} \sin B \sin C = \sin A - 2 \sin C$ 2 分

所以 $\sin B \cos C - \sqrt{3} \sin B \sin C = \sin(B - C) - 2 \sin C$,

则 $2 \sin C - \sqrt{3} \sin B \sin C = \sin(B + C) - \sin B \cos C = \cos B \sin C$ 4 分

∵ $\sin C \neq 0$, ∴ $2 - \sqrt{3} \sin B = \cos B$, $2 = \sqrt{3} \sin B + \cos B = 2 \sin\left(B + \frac{\pi}{6}\right)$

所以 $B + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$, ∴ $B = \frac{\pi}{3}$ 6 分

(2) 已知 r 为 $\triangle ABC$ 内切圆半径，∴ $B = \frac{\pi}{3}$, $b = 2$

∴ $b^2 = 4 = a^2 + c^2 - ac = (a+c)^2 - 3ac$,

∴ $ac \leq \left(\frac{a+c}{2}\right)^2$, ∴ $4 \geq (a+c)^2 - \frac{3}{4}(a+c)^2 = \frac{1}{4}(a+c)^2$,

∴ $a+c \leq 4$ 8 分

$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin B = \frac{\sqrt{3}}{4} ac$,

又因为 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(a+b+c)r = \frac{1}{2}(a+c+2)r$
 $\Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{ac}{a+c+2}$ 10分
 $\therefore r = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{ac}{a+c+2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{3ac}{a+c+2}$
 $= \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{(a+c)^2 - 4}{a+c+2} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot (a+c-2) \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$
 当且仅当 $a=c$ ，即 $\triangle ABC$ 为等边三角形时， r 取得最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 12分

18. (12分) 来源微信公众号：高三答案

(1) 证明：∵ $EF \parallel BC$ 且 $EF=BC$ ，所以四边形 $EFBC$ 为平行四边形，

所以 $BF \parallel EC$

又 $AD \parallel EF$ ， $AD \perp EC$

∴ $BF \perp EF$ 1分

又平面 $ADEF \perp$ 平面 $BCEF$ ，且平面 $ADEF \cap$ 平面 $BCEF = EF$ ，

∴ $BF \perp$ 平面 $ADEF$ 3分

∴ $FB \perp DE$ 5分

(2) 法一：连接 BD, BF, DF

因为 $CD = 2CB = 2$ ， $\angle BCD = \frac{\pi}{3}$

所以 $BD = \sqrt{3}$ ，

又 $CD^2 = CB^2 + BD^2$ ，所以 $BC \perp BD$ ，

因为 $BC \perp BF$ ，且 $BD \cap BF = B$

所以 $BC \perp$ 平面 BFD

因为 $EF \parallel BC$ ，所以 $EF \perp$ 平面 BFD 7分

又因为 $BF \perp$ 平面 $ADEF$

所以 $FD \perp FB$ ，

故 FD, FE, FB 两两垂直，

因为 $BD = \sqrt{3}$, $FB = \sqrt{2}$, 所以 $FD = 1$.

如图所示建系, $F(0,0,0)$, $A(-2,0,1)$, $B(0,\sqrt{2},0)$,

$C(1,\sqrt{2},0)$, $D(0,0,1)$,

$\overrightarrow{DC} = (1,\sqrt{2},-1)$, $\overrightarrow{FA} = (-2,0,1)$, $\overrightarrow{FB} = (0,\sqrt{2},0)$

设平面 ABF 的法向量为 $\vec{n} = (x,y,z)$,

$$\text{则} \begin{cases} -2x + z = 0 \\ \sqrt{2}y = 0 \end{cases}, \text{取 } \vec{n} = (1,0,2) \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

直线 DC 与平面 ABF 所成角正弦值为:

$$\sin \theta = |\cos \langle \vec{n}, \overrightarrow{DC} \rangle| = \left| \frac{1-2}{2 \times \sqrt{5}} \right| = \frac{\sqrt{5}}{10} \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

法二: 连接 BD, BF, DF .

取 AD 中点 M , 在平面 ADF 内作 $MH \perp FA$,

又 $BF \perp$ 平面 $ADF \Rightarrow BF \perp MH$,

所以 $MH \perp$ 平面 $BF\Delta$,

又因为 $DM \parallel CB$ 且 $DM = CB$

所以四边形 $DMBC$ 为平行四边形, $\therefore BM \parallel CD$

故 $\angle MBH$ 就是直线 DC 与平面 ABF 所成角 $\dots\dots\dots 8 \text{分}$

$$\therefore MH = AM \cdot \sin \angle DAF = \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad BM = CD = 2 \dots\dots\dots 10 \text{分}$$

(或者: $\because BD \perp AD \therefore BM = \sqrt{BD^2 + DM^2} = \sqrt{3^2 + 1^2} = 2$)

$$\therefore \sin \angle MBH = \frac{MH}{BM} = \frac{\sqrt{5}}{10} \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

所以直线 DC 与平面 ABF 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{10} \dots\dots\dots 12 \text{分}$

19. (12分)

(1) 解: 由题易知 $2S_n = 2n + na_n$, $2S_{n-1} = 2(n-1) + (n-1)a_{n-1} (n \geq 2)$

两式相减得 $(n-1)a_{n-1} - (n-2)a_n = 2 (n \geq 2)$

故 $(n-2)a_{n-2} - (n-3)a_{n-1} = 2 (n \geq 3)$ 2分

两式相减得 $2(n-2)a_{n-1} = (n-2)a_n + (n-2)a_{n-2} (n \geq 3)$

即 $2a_{n-1} = a_n + a_{n-2} (n \geq 3)$ 4分

又 $S_2 = 5$, 故 $a_1 = 2, a_2 = 3$, 故 $a_n = n+1 (n \geq 3)$,

经检验 $n=1, 2$ 也符合通项, 故 $a_n = n+1 (n \in \mathbf{N}^*)$ 5分

(2) 由题易知 $c_n = b_1^n b_2^{n-1} \cdots b_{n-1}^2 b_n, c_{n-1} = b_1^{n-1} b_2^{n-2} \cdots b_{n-2}^2 b_{n-1} (n \geq 2)$,

两式相除得 $\frac{c_n}{c_{n-1}} = b_1 b_2 \cdots b_n (n \geq 2)$,

又因为 $b_n = \frac{(n+2)^2}{(n+2)^2 - 1} = \frac{(n+2)^2}{(n+1)(n+3)}$,

所以 $\frac{c_n}{c_{n-1}} = b_1 b_2 \cdots b_n = \frac{3^2}{2 \cdot 4} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdots \frac{(n+2)^2}{(n+1)(n+3)} = \frac{3(n+2)}{2(n+3)} (n \geq 2)$ 7分

由累乘法可得: $\frac{c_2}{c_1} = \frac{3 \cdot 4}{2 \cdot 5}, \frac{c_3}{c_2} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 6}, \dots, \frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{3(n+2)}{2(n+3)} (n \geq 2)$

$\therefore \frac{c_n}{c_1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \frac{4}{n+3} (n \geq 2)$,

$\therefore c_1 = b_1 = \frac{9}{8}, \therefore c_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{3}{n+3} (n \geq 2)$

当 $n=1$ 时, $c_1 = \frac{9}{8}$ 也符合, $\therefore c_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n \frac{3}{n+3} (n \geq 1)$ 9分

则 $\frac{1}{c_n} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n (n+3)$

令 $d_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n (n+3)$, 设数列 $\{d_n\}$ 的前 n 项和为 T_n

$T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^1 \times 4 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 5 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n (n+3)$

$\frac{2}{3} T_n = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \times 4 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times 5 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \cdot (n+3),$

由错位相减法可得： $\frac{1}{3}T_n = \frac{8}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} (n+3)$

$$= \frac{8}{3} + \frac{4 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right]}{1 - \frac{2}{3}} - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} (n+3) = 4 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} (n+4) \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

所以 $T_n = 12 - (2n+12)\left(\frac{2}{3}\right)^n$,

则 $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \cdots + \frac{1}{c_n} = 4 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} (n+4) < 4$

即得 $\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_2} + \cdots + \frac{1}{c_n} < 4 \dots\dots\dots 12 \text{分}$

20. (12分)

(1) 解：由已知可得： $\begin{cases} \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ a^2 = 1 + c^2 \end{cases}$, 解得： $a=2, c=\sqrt{3}$

\therefore 椭圆的方程为： $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \dots\dots\dots 4 \text{分}$

(2) $\because M(-2, 0)$

设 AB 的直线方程为： $x = ty + m, A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$

联立方程： $\begin{cases} x = ty + m \\ x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$

整理得： $(t^2 + 4)y^2 + 2mty + m^2 - 4 = 0$

$\therefore y_1 + y_2 = \frac{-2mt}{t^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{m^2 - 4}{t^2 + 4} \dots\dots\dots 6 \text{分}$

$\because \angle AMB = \frac{\pi}{2}, (x_1 + 2)(x_2 + 2) + y_1 y_2 = 0 \Rightarrow x_1 x_2 + 2(x_1 + x_2) + 4 + y_1 y_2 = 0$

$(ty_1 + m)(ty_2 + m) + 2(ty_1 + m + ty_2 + m) + 4 + y_1 y_2 = 0,$

即 $(t^2 + 1)y_1 y_2 + (mt + 2t)(y_1 + y_2) + (m + 2)^2 = 0$

$\Rightarrow (t^2 + 1) \cdot \frac{m^2 - 4}{t^2 + 4} + (mt + 2t) \cdot \frac{-2mt}{t^2 + 4} + (m + 2)^2 = 0$

$$(t^2 + 1)(m^2 - 4) - 2m^2t^2 - 4mt^2 + (m^2 + 4m + 4)(t^2 + 4) = 0$$

$$(t^2m^2 - 4t^2 + m^2 - 4) - 2m^2t^2 - 4mt^2 + m^2t^2 + 4m^2 + 4mt^2 + 16m + 4t^2 + 16 = 0$$

整理得 $5m^2 + 16m + 12 = 0$ ，解得 $m = -\frac{6}{5}$ 或 $m = -2$ （舍去）

$$\therefore x = ty - \frac{6}{5} \dots\dots\dots 9 \text{分}$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{12t}{5(t^2 + 4)} \\ y_1 y_2 = \frac{-64}{25(t^2 + 4)} \end{cases}$$

$$\therefore S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} \cdot \left(2 + \frac{6}{5}\right) |y_1 - y_2| = \frac{8}{5} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \frac{32}{25} \cdot \frac{\sqrt{25t^2 + 64}}{t^2 + 4} \dots\dots\dots 11 \text{分}$$

$$\text{令 } \sqrt{25t^2 + 64} = u (u \geq 8),$$

$$S_{\triangle OAB} = \frac{32}{25} \cdot \frac{u}{\frac{u^2 - 64}{25} + 4} = \frac{32u}{u^2 + 36} = \frac{32}{u + \frac{36}{u}} \leq \frac{32}{8 + \frac{36}{8}} = \frac{64}{25}$$

当且仅当 $u = 8$ 时，即 $t = 0$ 时等号成立，

$$\text{此时 } S_{\triangle OAB} \text{ 最大值为 } \frac{64}{25} \dots\dots\dots 12 \text{分}$$

21. (12分)

(1) 解：因为 $f'(x) = e^x - e$ ， $\dots\dots\dots 1 \text{分}$

当 $x \in [1, +\infty)$ 时， $f'(x) \geq 0$ ， $f(x)$ 单调递增；

当 $x \in (-\infty, 1)$ 时， $f'(x) < 0$ ， $f(x)$ 单调递减；

所以， $f(x)_{\min} = f(1) = 0$ ，即 $f(x)$ 的最小值为 0。 $\dots\dots\dots 3 \text{分}$

(2) $h(x) = f'(x) - g(x) = e^x - 2ax - e + a + 1$ ， $h'(x) = e^x - 2a$ 。

因为 $x \in (0, 1)$ ，所以 $1 < e^x < e$ ，即 $1 - 2a < e^x - 2a < e - 2a$

若 $a \leq \frac{1}{2}$ 或 $a \geq \frac{e}{2}$ 时，函数 $h(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调，

所以 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上至多有一个零点，不符合题意，

所以 $\frac{1}{2} < a < \frac{e}{2}$ $\dots\dots\dots 5 \text{分}$

当 $\frac{1}{2} < a < \frac{e}{2}$, $\therefore h'(x) = e^x - 2a$,

则 $h(x)$ 在区间 $(0, \ln 2a]$ 上单调递减, 在区间 $[\ln 2a, 1)$ 上单调递增,

所以 $h(x)_{\min} = h(\ln 2a) = 3a - 2a \ln(2a) - e + 1$

如果 $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上存在两个零点, 则 $h(0) > 0$, $h(1) > 0$ 且 $h(x)_{\min} < 0$.

$$\text{由 } \begin{cases} h(0) = 2 - e + a > 0 \\ h(1) = -a + 1 > 0 \end{cases}, \text{ 得 } \begin{cases} a > e - 2 \\ a < 1 \end{cases},$$

又 $\frac{1}{2} < a < \frac{e}{2}$, 且 $\frac{e}{2} > 1, e - 2 > \frac{1}{2}$, 所以 $e - 2 < a < 1$ 8分

下面证明 $e - 2 < a < 1$ 时, $h(x)_{\min} = h(\ln 2a) = 3a - 2a \ln(2a) - e + 1 < 0$

令 $m(a) = 3a - 2a \ln(2a) - e + 1$,

则 $m'(a) = 1 - 2 \ln 2a$,

当 $\frac{\sqrt{e}}{2} < a < 1$ 时, $m'(a) < 0$, $m(a)$ 单调递减;

当 $e - 2 < a \leq \frac{\sqrt{e}}{2}$ 时, $m'(a) \geq 0$, $m(a)$ 单调递增;

$$\text{所以 } m(a)_{\max} = m\left(\frac{\sqrt{e}}{2}\right) = \frac{3}{2}\sqrt{e} - \sqrt{e} \ln \sqrt{e} - e + 1 = \sqrt{e} - e + 1$$

又因为 $e < (e-1)^2$, 所以 $\sqrt{e} < e-1$, 所以 $\sqrt{e} - e + 1 < 0$.

即 $h(x)_{\min} < 0$ 恒成立. 因此, 当 $e - 2 < a < 1$ 时, $h(x)$ 在 $(0, 1)$ 上有两个零点,

综上所述, $e - 2 < a < 1$ 满足题意. 12分

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分. 作答时请写清题号.

22. (10 分)

(1) 解: 直线 l 的参数方程为
$$\begin{cases} x = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = 1 + \frac{1}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}), \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 4 分

(2) 把直线 l 的参数方程代入 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$,

可得: $\frac{21}{4}t^2 + (8\sqrt{3}+9)t - 11 = 0$, 7 分

又 $\Delta = (8\sqrt{3}+9)^2 + 11 \times 21 > 0$, 所以方程有两个不同的实根,

设 t_1, t_2 是方程的两个实根, 则 $t_1 \cdot t_2 = -\frac{44}{21}$, 9 分

所以 $|PA| \cdot |PB| = |t_1| \cdot |t_2| = |t_1 t_2| = \frac{44}{21}$ 10 分

23. (10 分)

(1) 解: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

$\leq 3 + 2(a^2 + b^2 + c^2) = 9$ 4 分

所以 $|a+b+c| \leq 3$. 当且仅当 $a=b=c$ 时等号成立. 5 分

(2) 由 (1) 可知 $|x-1| + |2x+1| \geq (a+b+c)^2$ 对一切实数 a, b, c 恒成立.

等价于 $|x-1| + |2x+1| \geq 9$ 7 分

$$\text{令 } g(x) = |x-1| + |2x+1| = \begin{cases} 3x, & x \geq 1 \\ x+2, & -\frac{1}{2} < x < 1 \\ -3x, & x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

当 $x \geq 1$ 时, $3x \geq 9 \Rightarrow x \geq 3$,

当 $-\frac{1}{2} < x < 1$ 时, $x+2 \geq 9 \Rightarrow x \geq 7$, 舍去,

当 $x \leq -\frac{1}{2}$ 时, $-3x \geq 9 \Rightarrow x \leq -3$, 即 $x \geq 3$ 或 $x \leq -3$.

综上所述, x 取值范围为 $(-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$ 10 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线