江淮十校2024届高三第一次联考

数学试题

2023.8

命审单位：宿城一中　　命审人：周西凤　贺万一　吴跃

注意事项：

1. 本试卷满分150分，考试时间120分钟。
2. 答卷前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
3. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
4. 考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

一、选择题：共8小题，每小题5分，共40分. 在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求.

1. 已知集合 $A=\{x|\log_2(x-1)<0\}$，$B=\{x||x-2|<2\}$，则 $A\cap B=$

A. $\{x|1<x<2\}$　　B. $\{x|1<x<4\}$

C. $\{x|0<x<4\}$　　D. $\{x|x<4\}$

2. 已知复数 z 满足 $z(1+i)^2=-1+2i$（其中 i 为虚数单位），则复数 z 在复平面上对应的点位于

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

3. 已知空间向量 $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ 满足 $\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{c}|=2\sqrt{3}$，则 $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 夹角为

A. $30°$　　B. $150°$　　C. $60°$　　D. $120°$

4. 已知函数 $f(x)=x^2\left(\dfrac{a}{1-e^x}-2\right)$ 是奇函数，则实数 a 的值是

A. 1　　B. -2　　C. 4　　D. -4

5. $\cos 72°\sin 54°\sin 30°=$

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{1}{4}$　　C. $\dfrac{1}{6}$　　D. $\dfrac{1}{8}$

6. 在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_n=\dfrac{n^2+\lambda}{2^n}$，则“$\lambda>1$”是“$\{a_n\}$ 为单调递减数列”的

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

7. 已知椭圆 $C:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的左焦点为 F_1，过左焦点 F_1 作倾斜角为 $\dfrac{\pi}{6}$ 的直线交椭圆于 A,B 两点，且 $\overrightarrow{AF_1}=3\overrightarrow{F_1B}$，则椭圆 C 的离心率为

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{2}{3}$　　C. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　D. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

8. 若对任意的 $x_1,x_2\in(m,+\infty)$，且 $x_1<x_2$，$\dfrac{x_1\ln x_2-x_2\ln x_1}{x_1-x_2}>2$，则 m 的取值范围是

A. $\left[\dfrac{1}{e^3},e\right)$　　B. $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$　　C. $[e^2,+\infty)$　　D. $[e^3,+\infty)$

二、选择题：共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分.

9. 某学校数学学习兴趣小组利用信息技术手段探究两个数值变量 x,y 之间的线性关系，随机抽取 8 个样本点 $A_1(x_1,y_1),A_2(x_2,y_2),\cdots\cdots,A_8(x_8,y_8)$，由于操作过程的疏忽，在用最小二乘法求经验回归方程时只输入了前 6 组数据，得到的线性回归方程为 $y=b_1x+a_1$，其样本中心为(4,6). 后来检查发现后，输入 8 组数据得到的新的经验回归方程为 $y=b_2x$，新的样本中心为$(\bar{x},\bar{y})$. 已知 $x_7+x_8=0,y_7+y_8=4$，则

A. 新的样本中心仍为(4,6)

B. 新的样本中心为(3,5)

C. 两个数值变量 x,y 具有正相关关系

D. $\sum_{i=1}^{8}(y_i-b_1x_i-a_1)^2<\sum_{i=1}^{8}(y_i-b_2x_i)^2$

10. 已知抛物线 C 的标准方程为 $y^2=4x$，O 为坐标原点，直线 l 为其准线，点 A,B 是 C 上的两个动点（不是原点 O），线段 AB 与 x 轴交于点 M，连接 AO 并延长交准线于点 D，则

A. 若点 M 为 C 的焦点，则直线 BD 平行于 x 轴

B. 若点 M 为 C 的焦点，则线段 AB 的长度的最小值为 4

C. 若 $OA\perp OB$，则点 M 为 C 的焦点

D. 若$\triangle AOM$ 与$\triangle BOM$ 的面积之积为定值，则点 M 为 C 的焦点

11. 已知函数$f(x)$为定义在 R 上的可导函数，$g(x)=f'(x)$，$f(x)-1$ 为奇函数，$f(2x)$的图象关于 $x=-\frac{1}{2}$对称，则

A. $f(x)$的图象关于 $x=1$ 对称

B. $g(x)$为偶函数

C. $g(x)-g(x-2)=0$

D. $y=f(x)-1$ 在$[0,4]$上至少有 5 个零点

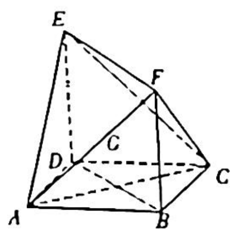
12. 如图，多面体 $ABCDEF$ 中，底面 $ABCD$ 为正方形，$BF\perp$底面 $ABCD$，$DE/\!/BF$，$AB=DE=BF=1$，点 G 在 AF 上，则下列说法正确的是

A. $DF\perp$平面 AEC

B. 多面体 $ABCDEF$ 的外接球的表面积为 3π

C. $\triangle BGD$ 的周长的最小值为$\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2}$

D. EG 与平面 AFC 所成的角的正弦值最大为$\frac{2\sqrt{2}}{3}$



三、填空题：共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 某高校开设了乒乓球、羽毛球、篮球、小提琴、书法五门选修课程可供学习，要求每位同学每学年至多选 2 门，该校学生小明想用前 3 学年将五门选修课程选完，则小明的不同选修方式有________种.（用数字作答）

14. 若$(2x-1)^6=a_0+a_1(x-1)+a_2(x-1)^2+\cdots+a_6(x-1)^6$，则 $a_0+a_2+a_4+a_6=$________.（用数字作答）

15. 将 4 个半径为$\sqrt{6}$的球堆放在一起，且两两相切，记与这 4 个球都内切的大球的半径为 R，记与这 4 个球都外切的小球的半径为 r，则$\frac{R}{r}=$________.

16. 已知函数$f(x)=3\sin\left(\omega x-\frac{\pi}{6}\right)(\omega>0)$，当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$时，函数$f(x)$的最大值为 ω，则满足条件的 ω 的个数为________.

四、解答题：共 6 小题，共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分)在$\triangle ABC$中，内角A,B,C所对边的长分别为a,b,c，且满足$a+c=b(\sqrt{3}\sin A+\cos A)$.

(1)求B；

(2)若$b=3$，且$\triangle ABC$的面积为$\sqrt{3}$，BD是$\triangle ABC$的中线，求BD的长.

18. (12 分)记S_n为等比数列$\{a_n\}$的前n项和，已知$a_4-a_1=14$，$S_6=9S_3$.

(1)求$\{a_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\left\{\dfrac{n+1}{a_n}\right\}$的前$n$项和$T_n$.

19. (12 分)为更好地促进学生数学学科素养的提升，某校数学组举办数学创新应用比赛. 比赛规则为先进行"创新赛"，再进行"应用赛"，结果为"通过"和"不通过"，所有参赛选手均需参加两项比赛，两项至少通过一项则授予"素养之星"称号. 已知甲同学通过"创新赛"的概率为α，若甲通过"创新赛"，则其通过"应用赛"的概率也为α；若其未通过"创新赛"，则通过"应用赛"的概率为$\dfrac{\alpha}{2}$.

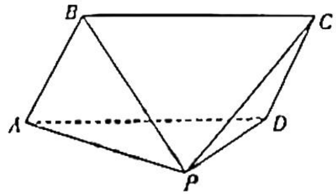
(1)若$\alpha=\dfrac{1}{2}$，求甲同学获得"素养之星"称号的概率；

(2)记随机变量X表示甲同学参加数学创新应用比赛获得"通过"的个数，求X的分布列和期望.

20.(12分)如图,在五面体 $PABCD$ 中,四边形 $ABCD$ 为正方形,$\triangle PAD$ 为正三角形,$AD=2$,$\cos\angle PAB=\frac{3}{4}$.

(1)若平面 $PAB\cap$ 平面 $PCD=l$,证明:$AB/\!/l$;

(2)求二面角 $A-BP-C$ 的余弦值.



21.(12分)在平面直角坐标系 xOy 中,已知双曲线 C 的中心为坐标原点,对称轴是坐标轴,右支与 x 轴的交点为(1,0),其中一条渐近线的倾斜角为$\frac{\pi}{3}$.

(1)求 C 的标准方程;

(2)过点 $T(2,0)$ 作直线 l 与双曲线 C 的左右两支分别交于 A,B 两点,在线段 AB 上取一点 E 满足 $|AE|\cdot|TB|=|EB|\cdot|AT|$,证明:点 E 在一条定直线上.

22.(12分)已知函数 $f(x)=x^3+\frac{k}{x}$,$k\neq 0$.

(1)讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2)设函数 $g(x)=x^3-\ln x$,$\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\leq n<m$,当 $k=-\frac{1}{3}$时,证明:$\frac{g(m)-g(n)}{3m-3n}<\frac{f(m)+f(n)}{2}$.

江淮十校 2024 届高三第一次联考

数学试题参考答案

一、选择题:共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
选项	A	D	B	C	D	B	C	D	BC	AB	AB	ABD

1. A 【解析】因为 $A=\{x\mid\log_2(x-1)<0\}=\{x\mid 1<x<2\}$, $B=\{x\mid |x-2|<2\}=\{x\mid 0<x<4\}$

所以 $A\cap B=\{x\mid 1<x<2\}\cap\{x\mid 0<x<4\}=\{x\mid 1<x<2\}$

故选 A

2. D 【解析】由复数 z 满足 $z(1+\mathrm{i})^2=-1+2\mathrm{i}$,

可得 $z=\frac{-1+2\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i})^2}=\frac{-1+2\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}=\frac{(-1+2\mathrm{i})\cdot\mathrm{i}}{2\mathrm{i}\cdot\mathrm{i}}=\frac{-2-\mathrm{i}}{-2}=1+\frac{1}{2}\mathrm{i}$ 可得 $\bar{z}=1-\frac{1}{2}\mathrm{i}$

所以复数 $\bar{z}$ 在复平面内对应的点为 $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$ 位于第四象限

故选 D

3. B 【解析】设 $\vec{b}$ 与 $\vec{c}$ 的夹角为 θ. 由 $\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$, 得 $2\vec{b}+\vec{c}=-\vec{a}$, 两边平方, 得 $4\vec{b}^2+4\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{c}^2=\vec{a}^2$,

所以 $4+4\times1\times2\sqrt{3}\cos\theta+12=4$, 解得 $\cos\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, 又因为 $\theta\in[0,\pi]$, 所以 $\theta=150°$,

故选 B

4. C 【解析】函数的定义域为 $\{x\mid x\neq0\}$

因为函数 $f(x)=x^2\left(\frac{a}{1-\mathrm{e}^x}-2\right)$ 是奇函数

所以 $f(-1)=-f(1)$,

所以 $(-1)^2\left(\frac{a}{1-\mathrm{e}^{-1}}-2\right)=-1^2\times\left(\frac{a}{1-\mathrm{e}}-2\right)$

$\frac{a\mathrm{e}}{\mathrm{e}-1}-2=-\frac{a}{1-\mathrm{e}}+2$,

所以 $a=4$

故选 C

5. D 【解析】$\cos72°\sin54°\sin30°=\frac{1}{2}\cos72°\cos36°=\frac{2\sin36°\cos36°\cos72°}{4\sin36°}=\frac{\sin72°\cos72°}{4\sin36°}=\frac{\sin144°}{8\sin36°}=\frac{1}{8}$,

故选 D.

6. B 【解析】已知 $\{a_n\}$ 为单调递减数列, 所以 $a_{n+1}-a_n=\frac{(n+1)^2+\lambda}{2^{n+1}}-\frac{n^2+\lambda}{2^n}=\frac{-n^2+2n+1-\lambda}{2^{n+1}}<0$ 恒成立,

即 $\lambda>-n^2+2n+1$ 对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立, 故 $\lambda>2$.

因此"$\lambda>1$"是"$\{a_n\}$ 为单调递减数列"的必要不充分条件, 故选 B.

7. C 【解析】设 $F_1(-c,0)$, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, 过点 F_1 所作直线的倾斜角为 $\frac{\pi}{6}$, 所以该直线斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$,

所以直线方程可写为 $x=\sqrt{3}y-c$, 联立方程 $\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ x=\sqrt{3}y-c\end{cases}$,

可得$(a^2+3b^2)y^2-2\sqrt{3}b^2cy-b^4=0$,

根据韦达定理:$y_1+y_2=\dfrac{2\sqrt{3}b^2c}{a^2+3b^2}$,$y_1y_2=-\dfrac{b^4}{a^2+3b^2}$,

因为$\overrightarrow{AF_1}=3\overrightarrow{F_1B}$,即$(-c-x_1,-y_1)=3(x_2+c,y_2)$,所以$y_1=-3y_2$,

所以$\dfrac{y_1}{y_2}+\dfrac{y_2}{y_1}=\dfrac{(y_1+y_2)^2}{y_1y_2}-2=\dfrac{\left(\dfrac{2\sqrt{3}b^2c}{a^2+3b^2}\right)^2}{-\dfrac{b^4}{a^2+3b^2}}-2=-3-\dfrac{1}{3}$,

即$\dfrac{3c^2}{a^2+3b^2}=\dfrac{1}{3}$,所以$a^2+3b^2=9c^2$,联立$\begin{cases}a^2+3b^2=9c^2\\a^2=b^2+c^2\end{cases}$,

可得$a^2=3c^2$,$e^2=\dfrac{1}{3}\Rightarrow e=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

故选 C

8. D 【解析】由题可知,$m>0$

因为$\dfrac{x_1\ln x_2-x_2\ln x_1}{x_1-x_2}>2$,且$0<x_1<x_2$,

所以$x_1\ln x_2-x_2\ln x_1<2x_1-2x_2$,两边同时除以$x_1x_2$得

$\dfrac{\ln x_2}{x_2}-\dfrac{\ln x_1}{x_1}<\dfrac{2}{x_2}-\dfrac{2}{x_1}$,即$\dfrac{\ln x_2}{x_2}-\dfrac{2}{x_2}<\dfrac{\ln x_1}{x_1}-\dfrac{2}{x_1}$

设函数$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}-\dfrac{2}{x}$,其中$x\in(0,+\infty)$,

因为当$m<x_1<x_2$时,$f(x_2)<f(x_1)$,所以$f(x)$在$(m,+\infty)$单调递减,

因为,$f'(x)=\dfrac{3-\ln x}{x^2}$

令$f'(x)=0$,$x=e^3$

$\therefore$ 当$x\in(0,e^3)$时,$f'(x)>0$,即$f(x)$在$(0,e^3)$上单调递增

当$x\in(e^3,+\infty)$时$f'(x)<0$,即$f(x)$在$(e^3,+\infty)$上单调递减,

所以$m\geqslant e^3$

故选 D

二、选择题:共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

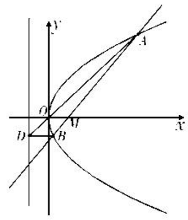
9. BC 【解析】对于 A、B,根据前 6 组数据的样本中心为$(4,6)$,又因为$x_7+x_8=0$,$y_7+y_8=4$,可得$\bar{x}=\dfrac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8}x_i=\dfrac{1}{8}(4\times6+0)=3$,$\bar{y}=\dfrac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8}y_i=\dfrac{1}{8}(6\times6+4)=5$,故 A 错误,B 正确;

对于 C,因为 8 组数据的样本中心为$(3,5)$,经验回归方程为$y=b_2x$,所以可以解得$b_2=\dfrac{5}{3}>0$,所以两个数值变量为正相关关系;

对于 D,根据样本估计总体及最小二乘法原理,利用 8 组数据所得的经验回归方程是与所有样本点"距离"平方和最小的直线方程,故 D 错误

故选 BC

10. AB 【解析】设点 $M(m,0)$，设直线 AB 的方程为 $x=ty+m$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，因为点 M 在线段 AB 上，所以 $m>0$



联立直线和抛物线方程得 $y^2-4ty-4m=0$，其中 $y_1+y_2=4t$，$y_1y_2=-4m$，直线 OA 的方程为 $y=\frac{y_1}{x_1}x$，得 $D\left(-1,-\frac{y_1}{x_1}\right)$，又因为 $y_1^2=4x_1$，故 $-\frac{y_1}{x_1}=-\frac{4}{y_1}$

对于A，若 $M(m,0)$ 为焦点，则 $m=1$，则 $y_D=-\frac{4}{y_1}=\frac{y_2}{m}=y_2$，A选项正确；

对于B，若 $M(m,0)$ 为焦点，则 $AB=\sqrt{1+t^2}\sqrt{16t^2+16}=4(1+t^2)\geqslant 4$，B选项正确；

对于C，若 $OA\perp OB$，有 $x_1x_2+y_1y_2=0$，解得 $m=4$，C选项错误；

对于D，$S_{\triangle AOM}\cdot S_{\triangle BOM}=\frac{1}{2}|OM||y_1|\cdot\frac{1}{2}|OM||y_2|=m^3$，只需 M 横坐标为定值即可，故D选项错误.

故选AB

11. AB 【解析】$f(2x)$ 的图象关于 $x=-\frac{1}{2}$ 对称，所以 $f(2x)=f(2(-1-x))=f(-2-2x)$，所以 $f(x)=f(-2-x)$，故 $f(x)$ 的图象关于 $x=-1$ 对称，又因为 $f(x)-1$ 为奇函数，所以 $f(x)$ 以点 $(0,1)$ 中心对称，所以 $f(x)$ 的图象关于 $x=1$ 对称，故A正确.

因为 $f(-x)-1=-f(x)+1$，所以 $-f'(-x)=-f'(x)$，所以 $g(-x)=g(x)$，故B正确.

因为 $f(x)=f(-2-x)$，所以 $f'(x)=-f'(-2-x)$，所以 $g(x)=-g(-2-x)$，所以 $g(x)$ 的图象关于 $(-1,0)$ 对称，又因为 $g(x)$ 为偶函数，故C错误.

取 $f(x)=1+\sin\frac{\pi}{2}x$，满足条件，因为 $f(0)=f(2)=f(4)=1$，此时函数 $y=f(x)-1$ 只有3个零点，故D错误.

故选AB

12. ABD 【解析】取 AE 的中点记为 H，连 DH，FH，由题意知 $AC\perp$ 平面 $BDEF$，故 $AC\perp DF$.

由 $AE\perp$ 平面 DHF，可得 $AE\perp DF$，所以 $DF\perp$ 平面 AEC，故A正确.

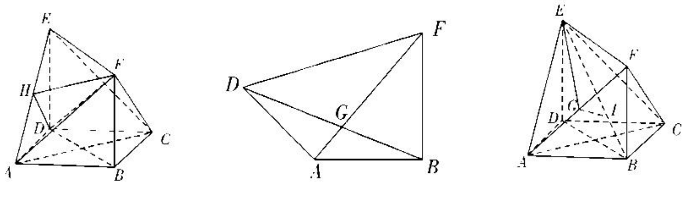
由题意可知，DF 的中点 O 为外接球的球心，故半径 $R=\frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $S=4\pi R^2=3\pi$，故B正确.

把 $\triangle ADF$ 沿 AF 折成与 $\triangle BAF$ 共面，连 BD，则 $(BG+BD)_{\min}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，

所以 $\triangle BGD$ 的周长的最小值为 $\sqrt{2+\sqrt{2}}+\sqrt{2}$，故C错误.

由对称性可知，$BE\perp$ 平面 AFC，记 $BE\cap$ 平面 $AFC=I$，连 IG，则 $\angle EGI$ 为 EG 与平面 AFC 所成的角，$\sin\angle EGI=\frac{EI}{EG}$，因为 $EI=\frac{2}{3}BE=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，

所以当 G 为中点时，$\angle EGI$ 的正弦值最大为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$，故D正确.



故选ABD

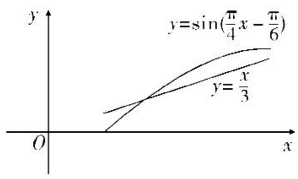
三、填空题：共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.

13. 90 【解析】由题意，前三年修完 5 门选修课程，每学年至多选 2 门，
则小明同学每年所修课程数为 1，2，2
先将 5 门学科按 1，2，2 分成三组，有$\frac{C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1}{A_2^2}$种方法
再分到这三个学年，有 A_3^3 种不同方法
由分步乘法计数原理得，不同选修方式共有$\frac{C_5^2 \cdot C_3^2 \cdot C_1^1}{A_2^2} \cdot A_3^3 = 90$ 种.
故答案：90

14. 365 【解析】令 $x=0$，则 $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + a_6 = 1$
令 $x=2$ 则 $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 3^6 = 729$
两式相加得：$2(a_0 + a_2 + a_4 + a_6) = 730$，$\therefore a_0 + a_2 + a_4 + a_6 = 365$
故答案：365

15. $5+2\sqrt{6}$ 【解析】将堆放在一起的四个球球心连在一起，形成一个棱长为 $2\sqrt{6}$ 的正四面体，此正四面体的中心即为题中与 4 球内切大球球心和与 4 球外切小球的球心，易知四面体中心到各顶点的距离为 3，
所以$R=3+\sqrt{6}$，$r=3-\sqrt{6}$，$\frac{R}{r}=5+2\sqrt{6}$
故答案：$5+2\sqrt{6}$

16. 2 【解析】由题知，当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$时，$\omega x - \frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{6}\right]$，因为最大值为 ω，
所以$\begin{cases} \frac{\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{6} > 0 \\ 0 < \omega \leqslant 3 \end{cases}$，解得$\frac{2}{3} < \omega \leqslant 3$.



(1) 当 $0 < \frac{\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{2}$时，即$\frac{2}{3} < \omega < \frac{8}{3}$，$f_{\max}(x) = 3\sin\left(\frac{\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{6}\right) = \omega$
解的个数，转化为方程 $\sin\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{x}{3}\left(\frac{2}{3} < x < \frac{8}{3}\right)$解的个数，由右图可知有且只有一个 ω 能够满足.
(2) 当$\frac{8}{3} \leqslant \omega \leqslant 3$ 时，$\frac{\pi}{2} \leqslant \frac{\pi}{4}\omega - \frac{\pi}{6} \leqslant \frac{7}{12}\pi$，此时函数最大值为 3，即 $\omega = 3$，显然满足条件.
综上，满足条件的 ω 有 2 个.
故答案：2

四、解答题：共 6 小题，共 70 分.

17. 解：(1) 因为 $a + c = b(\sqrt{3}\sin A + \cos A)$，由正弦定理可得
$\sin A + \sin C = \sin B(\sqrt{3}\sin A + \cos A)$
即 $\sin A + \sin(A+B) = \sin B(\sqrt{3}\sin A + \cos A)$
即 $\sin A + \sin A\cos B = \sqrt{3}\sin A\sin B$
又因为 $\sin A > 0$
所以$\sqrt{3}\sin B - \cos B = 1$ ………………………………………………………… 2 分
所以 $\sin\left(B - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$ ………………………………………………………… 3 分

又因为 $B\in(0,\pi)$

所以 $B-\frac{\pi}{6}\subset\left(-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right)$

所以 $B-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$

所以 $B=\frac{\pi}{3}$ …………………………………………………………………………………… 5 分

(2)因为 $S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}$

所以$\frac{1}{2}ac\sin B=\sqrt{3}$得 $ac=4$

由余弦定理得:$a^2+c^2=b^2+2ac\cos B=13$. ……………………………………………………… 7 分

又$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})$,

所以 $|\overrightarrow{BD}|^2=\frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC})^2=\frac{1}{4}(c^2+a^2+2ac\cos B)=\frac{17}{4}$ ……………………………………… 9 分

得 $|\overrightarrow{BD}|=\frac{\sqrt{17}}{2}$

故 BD 的长为$\frac{\sqrt{17}}{2}$ ………………………………………………………………………………… 10 分

18. 解:(1)设 a_n 的公比是 q,由题意知 $q\neq1$,

因为$\frac{S_6}{S_3}=\frac{1-q^6}{1-q^3}=1+q^3=9$

所以 $q=2$ ……………………………………………………………………………………… 2 分

由 $a_4-a_1=14$

得 $a_1(q^3-1)=14$

所以 $a_1=2$ ……………………………………………………………………………………… 4 分

所以 $a_n=2^n$. ……………………………………………………………………………………… 5 分

(2)因为$\frac{n+1}{a_n}=\frac{n+1}{2^n}$ ………………………………………………………………………… 6 分

所以 $T_n=1+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{n+1}{2^n}$

$\frac{1}{2}T_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\frac{n+1}{2^{n+1}}$ …………………………………………………………… 9 分

两式相减得

$\frac{1}{2}T_n=1+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)-\frac{n+1}{2^{n+1}}$

$=1+\frac{\frac{1}{2^2}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n+1}{2^{n+1}}$

$=\frac{3}{2}-\frac{n+3}{2^{n+1}}$ ……………………………………………………………………………… 11 分

即 $T_n=3-\frac{n+3}{2^n}$………………………………………………………………………………… 12 分

19. 解:(1)记“A_1”表示事件“甲通过创新赛”,“A_2”表示事件“甲通过应用赛”,“C”表示事件“甲获得素养之星称号”.

当$\alpha=\frac{1}{2}$时,由题知,$P(A_1)=\frac{1}{2}$,$P(A_2|\overline{A_1})=\frac{1}{4}$ ………………………… 2 分

$P(C)=1-P(\overline{A_1}\ \overline{A_2})=1-P(\overline{A_1})P(\overline{A_2}|\overline{A_1})=1-\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{5}{8}$ ………………………… 5 分

(2)随机变量 X 的可能取值为 0,1,2,则 ………………………… 6 分

$P(X=0)=P(\overline{A_1}\ \overline{A_2})=P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2}|\overline{A_1})=(1-\alpha)\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)=1+\frac{\alpha^2}{2}-\frac{3}{2}\alpha$

$P(X=1)=P(A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}A_2)=P(A_1)P(\overline{A_2}|A_1)+P(\overline{A_1})P(A_2|\overline{A_1})=\frac{3}{2}\alpha-\frac{3}{2}\alpha^2$

$P(X=2)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2|A_1)=\alpha^2$ ………………………… 9 分

所以随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$1+\frac{\alpha^2}{2}-\frac{3}{2}\alpha$	$\frac{3}{2}\alpha-\frac{3}{2}\alpha^2$	α^2

………………………… 10 分

所以 $EX=\frac{3}{2}\alpha+\frac{\alpha^2}{2}$ ………………………… 12 分

20. 解:(1)因为四边形 $ABCD$ 为正方形,所以 $AB/\!/CD$,

因为 $AB\not\subset$平面 PCD,$CD\subset$平面 PCD,所以 $AB/\!/$平面 PCD,

又因为 $AB\subset$平面 PAB,平面 $PAB\cap$平面 $PCD=l$,所以 $AB/\!/l$. ………………………… 4 分

(2)记 BC,AD 的中点分别为 E,F,连接 PE,EF,PF,

因为 $AD\perp EF,AD\perp PF,EF,PF\subset$平面 $PEF,EF\cap PF=F$,

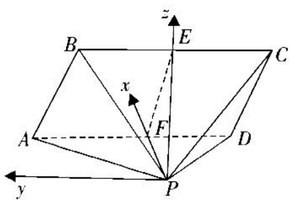
所以 $AD\perp$平面 PEF,所以 $AD\perp PE$.

因为 $\cos\angle PAB=\frac{3}{4}$,所以 $PB=\sqrt{2}$,又 $BC\perp PE$,所以 $PE=1$,

所以 $PE^2+PF^2=EF^2$,所以 $PE\perp PF$,$PF,AD\subset$平面 APD,$AD\cap PF=F$,

所以 $PE\perp$平面 PAD.

以 P 为坐标原点,以 PF,PE 所在的直线为 x,z 轴,过 P 与 AD 平行的直线为 y 轴,建立如图所示的空间直角坐标系. ………………………… 6 分



则 $P(0,0,0)$,$A(\sqrt{3},1,0)$,$B(0,1,1)$,$C(0,-1,1)$,

$\overrightarrow{PB}=(0,1,1)$,$\overrightarrow{PA}=(\sqrt{3},1,0)$,$\overrightarrow{PC}=(0,-1,1)$, ………………………… 7 分

设平面 PAB 的法向量为 $\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$,

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{PB}=y_1+z_1=0,\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{PA}=\sqrt{3}x_1+y_1=0,\end{cases}$ 令 $x_1=1$,得 $\vec{m}=(1,-\sqrt{3},\sqrt{3})$ ······························ 8 分

设平面 PBC 的法向量为 $\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$,

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{PB}=y_2+z_2=0,\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PC}=-y_2+z_2=0,\end{cases}$ 令 $x_2=1$,得 $\vec{n}=(1,0,0)$ ······························ 9 分

(或者说明 $PF\perp$ 平面 PBC,可取平面 PBC 的法向量为 $\vec{n}=(1,0,0)$)

$\cos\langle\vec{m},\vec{n}\rangle=\dfrac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}||\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$, ······························ 11 分

由图可知,二面角 $A-BP-C$ 为钝角,

所以二面角 $A-BP-C$ 的余弦值为 $-\dfrac{\sqrt{7}}{7}$. ······························ 12 分

(其他方法等效给分)

21. 解:(1)设双曲线的方程为 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$,由题知 $a=1$,$\dfrac{b}{a}=\sqrt{3}$, ······························ 2 分

可得双曲线方程为 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$. ······························ 4 分

(2)由题知,直线 l 斜率存在,根据对称性,不妨设斜率为 $k(0\leqslant k<\sqrt{3})$,故直线 l 的方程为 $y=k(x-2)$,

代入双曲线方程得 $(3-k^2)x^2+4k^2x-(4k^2+3)=0$, ······························ 6 分

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,由韦达定理有 $x_1+x_2=\dfrac{-4k^2}{3-k^2}$,$x_1x_2=-\dfrac{4k^2+3}{3-k^2}$,

且 $x_1\leqslant-1$,$1\leqslant x_2<2$, ······························ 7 分

设 $E(x_0,y_0)$,点 E 在线段 AB 上,所以 $x_1<x_0<x_2$

由 $|AE|\cdot|TB|=|EB|\cdot|AT|$ 可得

$\sqrt{1+k^2}(x_0-x_1)\cdot\sqrt{1+k^2}(2-x_2)=\sqrt{1+k^2}(x_2-x_0)\cdot\sqrt{1+k^2}(2-x_1)$

化简得 $4x_0-(2+x_0)(x_1+x_2)+2x_1x_2=0$, ······························ 9 分

代入 x_1+x_2 和 x_1x_2 并化简可得 $x_0=\dfrac{1}{2}$, ······························ 11 分

即存在点 E 满足条件,并且在定直线 $x=\dfrac{1}{2}$ 上. ······························ 12 分

(其他方法等效给分)

22. 解:(1)函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x\neq 0\}$,$f'(x)=2x-\dfrac{k}{x^2}=\dfrac{2x^3-k}{x^2}$,

令 $f'(x)=0$,则 $x=\sqrt[3]{\dfrac{k}{2}}$. ······························ 2 分

①当 $k<0$ 时,当 $x<\sqrt[3]{\dfrac{k}{2}}$ 时,$f'(x)<0$,$f(x)$ 单调递减;当 $\sqrt[3]{\dfrac{k}{2}}<x<0$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增;当 $x>0$ 时,$f'(x)>0$,$f(x)$ 单调递增; ······························ 3 分

②当 $k>0$ 时,当 $x<0$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减;当 $0<x<\sqrt[3]{\frac{k}{2}}$ 时, $f'(x)<0$, $f(x)$ 单调递减;当 $x>\sqrt[3]{\frac{k}{2}}$ 时, $f'(x)>0$, $f(x)$ 单调递增. ………………………… 4 分

综上:当 $k<0$ 时,单调递增区间为 $(\sqrt[3]{\frac{k}{2}},0)$, $(0,+\infty)$,单调递减区间为 $(-\infty,\sqrt[3]{\frac{k}{2}})$;

当 $k>0$ 时,单调递增区间为 $(\sqrt[3]{\frac{k}{2}},+\infty)$,单调递减区间为 $(-\infty,0)$, $(0,\sqrt[3]{\frac{k}{2}})$. ………………… 5 分

(2)对任意的 $m,n\in\left[\frac{1}{\sqrt[3]{3}},+\infty\right)$,且 $m>n$,令 $\frac{m}{n}=t\quad(t>1)$,

因为 $\frac{3}{2}(m-n)(f(m)+f(n))-(g(m)-g(n))$

$=(m-n)\left(\frac{3}{2}m^2+\frac{3}{2}n^2-\frac{1}{2m}-\frac{1}{2n}\right)-\left(m^3-n^3-\ln\frac{m}{n}\right)$ ………………………… 6 分

$=\frac{1}{2}m^3-\frac{1}{2}n^3+\frac{3}{2}mn^2-\frac{3}{2}m^2n+\frac{n}{2m}-\frac{m}{2n}+\ln\frac{m}{n}$

$=\frac{1}{2}n^3\left[\left(\frac{m}{n}\right)^3-1+3\cdot\frac{m}{n}-3\left(\frac{m}{n}\right)^2\right]-\frac{1}{2}\left(\frac{m}{n}-\frac{n}{m}-2\ln\frac{m}{n}\right)$

$=\frac{1}{2}n^3(t^3-3t^2+3t-1)-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}-2\ln t\right)=\frac{1}{2}n^3(t-1)^3-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}-2\ln t\right)$

$\geqslant\frac{1}{6}(t-1)^3-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}-2\ln t\right)=\frac{1}{6}\left[(t^3-3t^2+3t-1)-3\left(t-\frac{1}{t}-2\ln t\right)\right]$

$=\frac{1}{6}\left(t^3-3t^2+6\ln t+\frac{3}{t}-1\right)$ ………………………… 9 分

记 $h(t)=t^3-3t^2+6\ln t+\frac{3}{t}-1$,

则 $h'(t)=3t^2-6t+\frac{6}{t}-\frac{3}{t^2}=3\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)-6\left(t-\frac{1}{t}\right)=3\left(t-\frac{1}{t}\right)\left(t+\frac{1}{t}-2\right)>0$

所以 $h(t)$ 在 $(1,+\infty)$ 单调递增,所以 $h(t)>h(1)=0$,故 $t^3-3t^2+6\ln t+\frac{3}{t}-1>0$

所以 $\frac{3}{2}(m-n)(f(m)+f(n))-(g(m)-g(n))>0$

故 $\frac{g(m)-g(n)}{3m-3n}<\frac{f(m)+f(n)}{2}$. ………………………… 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。