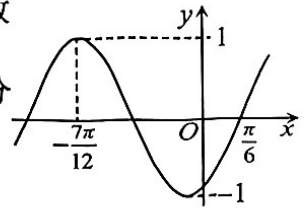




4. 已知函数  $f(x) = A\cos(\omega x + \varphi)$  ( $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ )，将函数  $f(x)$  的图象向左平移  $\frac{3\pi}{4}$  个单位长度，得到函数  $g(x)$  的部分图象如图所示，则  $g\left(\frac{\pi}{3}\right) =$  ( )

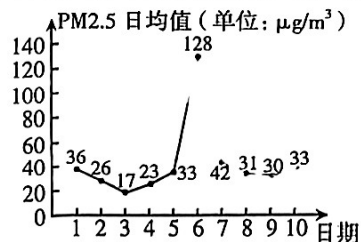


- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$                       C.  $-\frac{1}{2}$                       D.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$
5. 已知  $F$  为双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  ( $a > 0, b > 0$ ) 的右焦点， $A$  为双曲线虚轴的一个端点，直线  $FA$  与双曲线的一条渐近线在  $y$  轴左侧的交点为  $B$ ，若  $\overrightarrow{FA} = (\sqrt{2} - 1)\overrightarrow{AB}$ ，则此双曲线渐近线的夹角为 ( )
- A.  $\frac{\pi}{2}$                       B.  $\frac{\pi}{3}$                       C.  $\frac{\pi}{4}$                       D.  $\frac{\pi}{6}$
6. 已知平面向量  $\vec{a} = (-2, \lambda)$ ， $\vec{b} = (1, 1)$ ，且  $\vec{a} \perp \vec{b}$ ，则  $\vec{a} - \vec{b}$  在  $\vec{b}$  方向上的投影向量的坐标为 ( )
- A.  $(1, 1)$                       B.  $(1, -1)$                       C.  $(-1, 1)$                       D.  $(-1, -1)$
7. 已知函数  $f(x)$  的导函数为  $f'(x)$ ，且对任意的实数  $x$  都有  $f'(x) + f(x) = \frac{2x+3}{e^x}$  ( $e$  是自然对数的底数)，且  $f(0) = 1$ ，若关于  $x$  的方程  $f(x) - m = 0$  恰有两个实数根，则实数  $m$  的取值范围是 ( )
- A.  $\left\{\frac{5}{e}, -e^2\right\}$                       B.  $(-e^2, 0] \cup \left\{\frac{5}{e}\right\}$                       C.  $(-e^2, 0]$                       D.  $(-e^2, 0)$
8. 2023 年 1 月至 4 月，曲靖市辖区内长期没有下雨，4 月份处于严重干旱状况，广大市民必须加强节约用水意识，家家户户都要节约用水. 为了督促市民节约用水，曲靖市水务投资公司对居民生活用水实行阶梯水价制度进行收费，其收费标准如下：一户居民每月用水量不超过 15 吨时，收费单价为 3.5 元/吨；超过 15 吨但不超过 20 吨时，超出 15 吨部分的收费单价为 4.75 元/吨；超过 20 吨时属于严重超标，超出 20 吨部分的收费单价为 6 元/吨. 某学生社团对某生活区的住户进行用水量调查，该生活区的某单元内居住着 3 户人家，每户月用水量严重超标的概率均为  $p$  ( $0 < p < 1$ ) 且相互独立，该单元有至少两户人家月用水量严重超标的概率为  $f(p)$ ，当  $f(p) = \frac{1}{2}$  时， $p =$  ( )

- A.  $\frac{1}{2}$                       B.  $\frac{1}{3}$                       C.  $\frac{2}{3}$                       D.  $\frac{3}{4}$

二、选择题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分，部分选对的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. PM2.5 是衡量空气质量的重要指标。下图是某地 4 月 1 日到 10 日的 PM2.5 日均值 (单位:  $\mu\text{g}/\text{m}^3$ ) 的折线图, 则下列说法正确的是 ( )

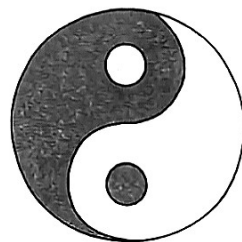


- A. 这 10 天中 PM2.5 日均值的众数为 33
- B. 这 10 天中 PM2.5 日均值的第 75 百分位数是 36
- C. 这 10 天中 PM2.5 日均值的中位数大于平均数
- D. 这 10 天中 PM2.5 日均值前 4 天的方差小于后 4 天的方差

10. 正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 1,  $E$ 、 $F$  分别为  $BC$ 、 $CC_1$  的中点, 动点  $H$  在线段  $A_1C_1$  上, 则下列结论中正确的是 ( )

- A. 直线  $AF$  与直线  $ED_1$  异面
- B. 平面  $AEF$  截正方体所得的截面面积为  $\frac{9}{8}$
- C. 存在点  $H$ , 使得平面  $AEH \parallel$  平面  $CDD_1C_1$
- D. 三棱锥  $A - ECH$  的体积为定值

11. 中国传统文化中很多内容体现了数学的“对称美”。如图所示的太极图是由黑白两个鱼形纹组成的圆形图案, 充分体现了相互转化、对称统一的形式美、和谐美。定义: 图象能够将圆  $O$  的周长和面积同时等分成两部分的函数称为圆  $O$  的一个“太极函数”。给出下列命题, 其中正确的命题为 ( )



- A. 对于任意一个圆  $O$ , 其“太极函数”有无数个
- B. 函数  $f(x) = x^3 - 3x$  可以是某个圆的“太极函数”
- C. 正弦函数  $y = \sin x$  可以同时是无数个圆的“太极函数”
- D. 函数  $y = f(x)$  是“太极函数”的充要条件为函数  $y = f(x)$  的图象是中心对称图形

12. 若实数  $x, y$  满足  $2^x + 2^{y+1} = 1$ , 则 ( )

- A.  $x < 0$  且  $y < -1$
- B.  $x + y$  的最大值为  $-3$
- C.  $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{y-1}$  的最小值为 7
- D.  $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{2}\right)^{y-1}\right] \cdot 2^{x+y} < 2$

三、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13.  $(y-2)(x-3)^4$  的展开式中含  $x^3y$  的项的系数为\_\_\_\_\_。

14. 已知圆  $C$  的圆心是抛物线  $x^2 = 4y$  的焦点, 直线  $4x - 3y - 2 = 0$  与圆  $C$  相交于  $A$ 、 $B$  两点, 且  $|AB| = 6$ , 则圆  $C$  的标准方程为\_\_\_\_\_。



15. 已知数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和是  $S_n$ , 且  $S_n = 2a_n - 1$ , 若  $a_n \in (0, 2023)$ , 则称项  $a_n$  为“和谐项”, 那么数列  $\{a_n\}$  的所有“和谐项”的和为\_\_\_\_\_.

16. 某单位使用的圆台形纸杯如图所示, 其内部上口直径、下口直径、母线的长度依次等于 8cm、6cm、12cm, 将纸杯盛满水后再将水缓慢倒出, 当水面恰好到达杯底 (到达底面圆“最高处”) 的瞬间的水面边缘曲线的离心率等于\_\_\_\_\_.



四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 10 分)

在①  $a \sin(A+C) = b \cos(A - \frac{\pi}{6})$ ; ②  $1 + 2 \cos C \cos B = \cos(C-B) - \cos(C+B)$ ;

③  $\frac{2 \tan B}{\tan A + \tan B} = \frac{b}{c}$  这三个条件中选择一个补充在下面问题中的横线上, 然后求解.

问题: 在  $\triangle ABC$  中, 内角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $b+c = 2\sqrt{3}, a = \sqrt{6}$ ,

\_\_\_\_\_. (说明: 只需选择一个条件填入求解, 如果三个都选择并求解的, 只按选择的第一种情形评分)

(1) 求角  $A$  的大小;

(2) 求  $\triangle ABC$  内切圆的半径.

18. (本小题满分 12 分)

已知数列  $\{a_n\}$  是公差为  $d (d \neq 0)$  的等差数列, 且满足  $a_1 = 1, a_{n+1} = x a_n + 2$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

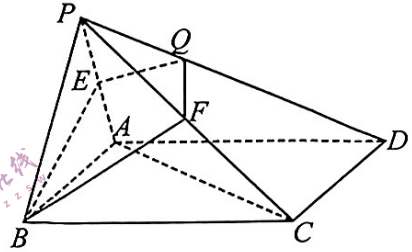
(2) 设  $b_n = (-1)^n \cdot \frac{4n}{a_n a_{n+1}}$ , 求数列  $\{b_n\}$  的前 10 项和  $S_{10}$ .

19. (本小题满分 12 分)

如图, 已知四棱锥  $P-ABCD$  的底面是平行四边形, 侧面  $PAB$  是等边三角形,  $BC = 2AB$ ,  $AC = \sqrt{3}AB$ ,  $PB \perp AC$ .

(1) 求证: 平面  $PAB \perp$  平面  $ABCD$ ;

(2) 设  $Q$  为侧棱  $PD$  上一点, 四边形  $BEQF$  是过  $B, Q$  两点的截面, 且  $AC \parallel$  平面  $BEQF$ , 是否存在点  $Q$ , 使得平面  $BEQF \perp$  平面  $PAD$ ? 若存在, 求  $\frac{PQ}{QD}$  的值; 若不存在, 说明理由.



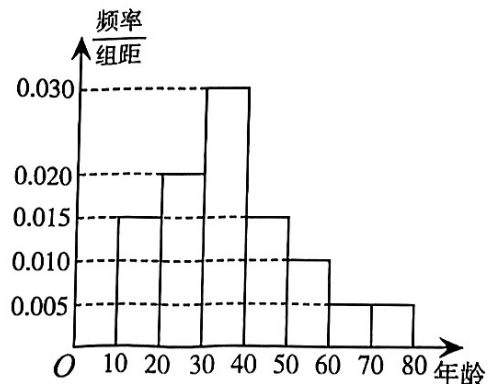
20. (本小题满分 12 分)

阅读对人的成长影响是巨大的, 一个人的精神发展史, 在一定意义上就是他本人的阅读史, 而一个民族的精神境界, 在很大程度上取决于全民族的阅读水平. 为了倡导全民阅读, 1995 年, 联合国教科文组织宣布, 每年的 4 月 23 日为“世界读书日”. 在今年的“世界读书日”来临之际, 某书店为了了解市民阅读情况, 在某小区随机抽取了 40 名居民, 将他们的年龄分成 7 段:  $[10, 20)$ 、 $[20, 30)$ 、 $[30, 40)$ 、 $[40, 50)$ 、 $[50, 60)$ 、 $[60, 70)$ 、 $[70, 80]$ , 得到如图所示的频率分布直方图.

(1) 求这 40 名居民中年龄不低于 70 岁的人数;

(2) ①若从样本中年龄在 40 岁及以上的居民中任取 4 名赠送图书, 求这 4 名居民中至少有 1 人年龄不低于 70 岁的概率;

②该书店采用抽奖方式来提升购书意愿, 将某特定书籍售价提高 10 元, 且允许购买此特定书籍的居民抽奖 3 次. 规定中奖 1 次、2 次、3 次分别奖现金  $x$  元、 $2x$  元、 $3x$  元, 且居民每次中奖的概率均为  $\frac{1}{5}$ . 若要使抽奖方案对该书店有利, 则奖金  $x$  最高可定为多少元? (结果精确到个位数)



21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的离心率为  $\frac{\sqrt{5}}{5}$ , 以椭圆的顶点为顶点的四边形面积为  $4\sqrt{5}$ .

(1) 求椭圆  $C$  的标准方程;

(2) 我们称圆心在椭圆  $C$  上运动且半径为  $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{3}$  的圆是椭圆  $C$  的“环绕圆”. 过原点  $O$  作椭圆  $C$  的“环绕圆”的两条切线, 分别交椭圆  $C$  于  $A, B$  两点, 若直线  $OA, OB$  的斜率存在, 并记为  $k_1, k_2$ , 求  $k_1 k_2$  的取值范围.

22. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = ax^2 - x \ln x + 1 (a \in \mathbb{R})$ ,  $f'(x)$  是  $f(x)$  的导函数.

(1) 求函数  $y = f'(x)$  的极值;

(2) 若函数  $f(x)$  有两个不同的零点  $x_1, x_2$ , 证明:  $x_1 x_2 > 2e^2$ .