2023届高三冲刺卷（五）　全国卷

理科数学参考答案及评分意见

1.B 【解析】因为 $A=\{-1,1,2,3\}$，$B=\left\{x\left|\frac{2}{x-2}\leqslant 1\right.\right\}=\{x|x<2$ 或 $x\geqslant 4\}$，则 $A\cap B=\{-1,1\}$.故选 B.

2.B 【解析】$\because(3+a\mathrm{i})(-1+\mathrm{i})=-b+2\mathrm{i}$，$\therefore(3-a)\mathrm{i}-a-3=2\mathrm{i}-b$，$\therefore\begin{cases}-a-3=-b,\\3-a=2,\end{cases}$解得$\begin{cases}a=1,\\b=4,\end{cases}$

所以 $\left|a-\frac{1}{2}b\mathrm{i}\right|=|1-2\mathrm{i}|=\sqrt{5}$.故选 B.

3.C 【解析】所求几何体的侧面积为 $3\times4\times6=72\ \mathrm{cm}^2$，上下底面面积为$\left(\frac{1}{2}\times3^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times6-\pi\right)\times2=(27\sqrt{3}-2\pi)(\mathrm{cm}^2)$，

挖去圆柱的侧面积为 $2\pi\times4=8\pi(\mathrm{cm}^2)$，则所求几何体的表面积为$(72+27\sqrt{3}+6\pi)\mathrm{cm}^2$.故选 C.

4.D 【解析】对于 A，若 $m=7$，则平均数为$\frac{2+3+4+6+7}{5}=4.4$，故 A 正确；

对于 B，当 $m=4$ 时，众数为 4，故 B 正确；

对于 C，若 $m=6$，则这组数据从小到大排列为 2，3，4，6，6，所以中位数为 4，故 C 正确；

对于 D，计算平均数为 5，则方差 $s^2=\frac{1}{5}[(2-5)^2+(3-5)^2+(4-5)^2+(6-5)^2+(10-5)^2]=8$，故 D 错误.

故选 D.

5.B 【解析】$\sin\left(\frac{6\pi}{5}+\alpha\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{5}+\alpha\right)=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\therefore\sin\left(\frac{\pi}{5}+\alpha\right)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.又$\cos\left(\frac{3\pi}{5}-2\alpha\right)=\cos\left[\pi-\left(\frac{2\pi}{5}+2\alpha\right)\right]=-\cos\left(\frac{2\pi}{5}+2\alpha\right)=$
$-1+2\sin^2\left(\frac{\pi}{5}+\alpha\right)=-\frac{1}{3}$.故选 B.

6.D 【解析】$a_{n+1}=3-\frac{2}{a_n}$，$a_{n+1}-2=1-\frac{2}{a_n}=\frac{a_n-2}{a_n}$，显然若 $a_n-2=0$，则 $a_{n+1}-2=0$，则 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$a_n=2$，与题意矛盾.所以 $\forall n\in$
$\mathbf{N}_+$，$a_n-2\neq0$.两边同时取倒数，得：$\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{a_n}{a_n-2}=1+\frac{2}{a_n-2}$，

设 $b_n=\frac{1}{a_n-2}$，$b_1=1$，$b_{n+1}=1+2b_n$，$b_n=1+2b_{n-1}$，…，$b_2=1+2b_1$，迭代得：$b_n=1+2+4+8+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$，

$\therefore\frac{1}{a_n-2}=2^n-1$，$a_n=\frac{1}{2^n-1}+2$.故选 D.

7.D 【解析】由题意知$\begin{cases}a_2-a_1=2,\\a_3-a_2=3,\\\cdots,\\a_n-a_{n-1}=n,\end{cases}$ $n\geqslant2$，$n\in\mathbf{N}^*$，且 $a_1=1$，则由累加法可知，$a_n-a_1=2+3+\cdots+n$，

所以 $a_n=1+2+\cdots+n=n+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$，$\frac{2n+1}{a_n^2}=\frac{4(2n+1)}{n^2(n+1)^2}=4\left[\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]$，

$S_n=4\left[1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^n}+\cdots+\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right]=4\left[1-\frac{1}{(n+1)^2}\right]$，$\therefore S_{2\,023}=4\left[1-\left(\frac{1}{2\,024}\right)^2\right]$.故选 D.

8.C 【解析】集合 $M=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$的三元子集个数为 $\mathrm{C}_9^3=84$，

满足集合中的元素都是孤立元素的集合 N 可能为$\{1,3,5\}$，$\{1,3,6\}$，$\{1,3,7\}$，$\{1,3,8\}$，$\{1,3,9\}$，$\{1,4,6\}$，$\{1,4,7\}$，$\{1,4,8\}$，$\{1,4,9\}$，$\{1,5,7\}$，$\{1,5,8\}$，$\{1,5,9\}$，$\{1,6,8\}$，$\{1,6,9\}$，$\{1,7,9\}$，$\{2,4,6\}$，$\{2,4,7\}$，$\{2,4,8\}$，$\{2,4,9\}$，$\{2,5,7\}$，$\{2,5,8\}$，$\{2,5,9\}$，$\{2,6,8\}$，$\{2,6,9\}$，$\{2,7,9\}$，$\{3,5,7\}$，$\{3,5,8\}$，$\{3,5,9\}$，$\{3,6,8\}$，$\{3,6,9\}$，$\{3,7,9\}$，$\{4,6,8\}$，$\{4,6,9\}$，$\{4,7,9\}$，$\{5,7,9\}$，一共 35 种.由古典概率模型公式，可得集合 N 中的元素都是孤立元素的概率 $P=\frac{35}{84}$.故选 C.

9.C 【解析】解法一：抛物线的准线方程为 $y=-1$，焦点为 $F(0,1)$，

设点 P 的坐标为(m,n)，则点 Q 的坐标为$(m,-1)$，$|PQ|=n+1$，

由抛物线的定义知$|PF|=|PQ|=n+1$，因为$|PF|=|QF|=\sqrt{m^2+4}$，所以$\triangle PCF$ 为等边三角形，所以 $n+1=\sqrt{m^2+4}$，又 $n=\frac{1}{4}m^2$，所以 $m=\pm2\sqrt{3}$，$n=3$，所以点 P 的坐标为$(\pm2\sqrt{3},3)$，

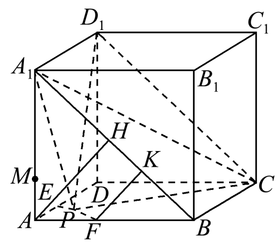
所以$|PF|=4$，所以 $S_{\triangle PFQ}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times4^2=4\sqrt{3}$.故选 C.

解法二：由抛物线定义$|PF|=|PQ|$，又$|PF|=|QF|$，故$\triangle PFQ$为正三角形，抛物线的准线方程为$y=-1$，焦点为$F(0,1)$，故$\triangle PFQ$边长为4，故$S_{\triangle PFQ}=\frac{\sqrt{3}}{4}\times 4^2=4\sqrt{3}$.故选C.

10.C 【解析】设$f(x)$的最小正周期为T，根据$f(x_0)=-f\left(x_0+\frac{\pi}{3}\right)$及函数图象的对称性知，$\frac{T}{2}=\left(x_0+\frac{\pi}{3}\right)-x_0$，所以$T=\frac{2\pi}{3}=\frac{2\pi}{\omega}$，得$\omega=3$.由$f(0)=1$，得$\sin(3\times 0+\varphi)=\frac{1}{2}$，因为$0<\varphi<\pi$，由图知$\varphi=\frac{\pi}{6}$，故$f(x)=2\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)$.由$f(x_0)=1$，

得$2\sin\left(3x_0+\frac{\pi}{6}\right)=1$，即$\sin\left(3x_0+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$，由图象易知$3x_0+\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$，得$x_0=\frac{2\pi}{9}$.故选C.

11.C 【解析】如图所示：



对于A，当$MA=AP=1$时，MP与底面$ABCD$所成的角$\theta=\frac{\pi}{4}$，又点P所在区域为以A为圆心，1为半径的圆在正方形$ABCD$内部部分(包含边界弧长)，所以$\angle AMP\leqslant\frac{\pi}{4}$，故A正确；

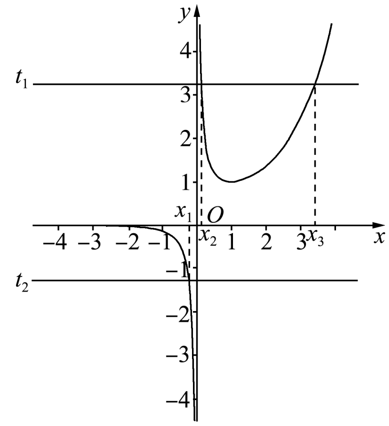
对于B，当点P位于AE上时，此时点P到平面A_1CD_1的距离最大，最大距离$AH=\frac{3\times 4}{5}=\frac{12}{5}$，当$P$与点$F$重合时，此时点$P$到平面$A_1CD_1$的距离最小，最小距离为$FK$，因为$\triangle BFK\backsim\triangle BAH$，所以$FK=\frac{3}{4}AH$，所以$FK=\frac{9}{5}$，故点$P$到平面$A_1CD_1$的距离取值范围为$\left[\frac{9}{5},\frac{12}{5}\right]$，故B正确；

对于C，不妨设点P与点F重合，此时$PC_1=FC_1=\sqrt{FB^2+BC^2+C_1C^2}=\sqrt{34}$，$MF=\sqrt{MA^2+AF^2}=\sqrt{2}$，$MC_1=\sqrt{MA_1^2+A_1D_1^2+D_1C_1^2}=6$，由余弦定理得$\cos\angle MFC_1=\frac{MF^2+FC_1^2-C_1M^2}{2MF\cdot FC_1}=\frac{2+34-36}{2\times\sqrt{2}\times\sqrt{34}}=0$，则$\angle MFC_1=\frac{\pi}{2}$，故存在点$P$使得$MP\perp PC_1$，故C错误；

对于D，当$BP=3$时，四面体$P-B_1C_1B$的外接球半径为$r=\frac{\sqrt{3^2+4^2+3^2}}{2}=\frac{\sqrt{34}}{2}$，所以外接球体积为$\frac{17\sqrt{34}\pi}{3}$，故D正确.故选C.

12.A 【解析】$f(x)=\frac{e^{x-1}}{x}+\frac{x}{e^{x-1}+x}+a=\frac{e^{x-1}}{x}+\frac{1}{\frac{e^{x-1}}{x}+1}+a$，令$t=\frac{e^{x-1}}{x}$，则$t'=\left(\frac{e^{x-1}}{x}\right)'=\frac{(x-1)e^{x-1}}{x^2}$，$\therefore t=\frac{e^{x-1}}{x}$在$(-\infty,0)$，$(0,1)$上单调递减，在$(1,+\infty)$上单调递增，则$t=\frac{e^{x-1}}{x}\in(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$，所以$f(x)=0$有3个不同的解等价于$t+\frac{1}{t+1}+a=0$有两个解$t_1,t_2$且$t_1>1,t_2<0$，整理可得$t^2+(a+1)t+(a+1)=0$，$\therefore$根据根的分布，得$\begin{cases}a+1<0,\\1+a+1+a+1<0,\end{cases}\Rightarrow a<-\frac{3}{2}$，又$t_1+t_2=-(a+1)$，

$\therefore\frac{2e^{x_1}}{x_1}+\frac{e^{x_2}}{x_2}+\frac{e^{x_3}}{x_3}=2\left(\frac{e^{x_1}}{x_1}+\frac{e^{x_2}}{x_2}\right)=2e\left(\frac{e^{x_1-1}}{x_1}+\frac{e^{x_2-1}}{x_2}\right)=2e(t_1+t_2)=-2e(a+1)\in(e,+\infty)$.故选A.



13.$\frac{4\sqrt{15}}{5}$ 【解析】圆 $C:(x-3)^2+y^2=4$，$r=2$，圆心$(3,0)$到直线 $y=\frac{1}{3}(x+1)$的距离 $d=\frac{4}{\sqrt{10}}$，利用勾股定理，$\frac{1}{2}|MN|=\sqrt{r^2-d^2}=\sqrt{4-\frac{16}{10}}$，解得$|MN|=\frac{4\sqrt{15}}{5}$.

14.$\sqrt{3}$或$-\sqrt{3}$ 【解析】$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=1\times1\times\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{1}{2}$，$\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\frac{\pi}{3}$，$\because \boldsymbol{c}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，利用三角形法则可知，$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 夹角为$\frac{\pi}{6}$或$\frac{5\pi}{6}$，则 $\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cdot\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=1\times2\times\cos\langle\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\rangle=\sqrt{3}$或$-\sqrt{3}$，故答案为$\sqrt{3}$或$-\sqrt{3}$.

15.$3+2\sqrt{3}$ 【解析】解法一：因为 $x+2y=1$，

所以$\frac{x^2+x+1}{2xy}=\frac{x}{2y}+\frac{x+1}{2xy}=\frac{x}{2y}+\frac{x+y}{xy}=\frac{x}{2y}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=\frac{x}{2y}+\frac{x+2y}{y}+\frac{x+2y}{x}=3+\frac{3x}{2y}+\frac{2y}{x}\geqslant3+2\sqrt{3}$，

当且仅当$\begin{cases}\frac{3x}{2y}=\frac{2y}{x},\\x+2y=1,\end{cases}$ 即$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{3}-1}{2},\\y=\frac{3-\sqrt{3}}{4},\end{cases}$时，等号成立，所以$\frac{x^2+x+1}{2xy}$的最小值为 $3+2\sqrt{3}$.

解法二：令$\frac{x^2+x+1}{2xy}=\frac{x^2+x+1}{x(1-x)}=t(t>0)$，整理得$(t+1)x^2+(1-t)x+1=0$.因为方程有解，

所以 $\Delta=(1-t)^2-4(t+1)=t^2-6t-3\geqslant0$，解得 $t\leqslant3-2\sqrt{3}$ 或 $t\geqslant3+2\sqrt{3}$，因为 $t>0$，故最小值为 $3+2\sqrt{3}$.

16.$[0,+\infty)$ 【解析】由题意可得函数 $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}+1$ 的定义域为$(0,+\infty)$，不等式 $f(x)\leqslant g(x)$等价于 $1+\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{x}\leqslant(1+m)\mathrm{e}^x$ 恒成立，即 $m\geqslant\frac{\ln x+x+1}{x\mathrm{e}^x}-1$ 恒成立，令 $G(x)=\frac{\ln x+x+1}{x\mathrm{e}^x}$，则 $G'(x)=\frac{-(x+1)(\ln x+x)}{x^2\mathrm{e}^x}$.

令 $h(x)=\ln x+x$，则 $h(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，因为 $h\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}-1<0$，$h(1)=1>0$，

所以存在 $x_0\in\left(\frac{1}{\mathrm{e}},1\right)$，使得 $h(x_0)=x_0+\ln x_0=0$，当 $x\in(0,x_0)$时，$h(x)<0$，$G'(x)>0$，$G(x)$单调递增；

当 $x\in(x_0,+\infty)$时，$h(x)>0$，$G'(x)<0$，$G(x)$单调递减；所以 $G(x)_{\max}=G(x_0)=\frac{\ln x_0+x_0+1}{x_0\mathrm{e}^{x_0}}$，

由于 $x_0+\ln x_0=0$，可得 $x_0=-\ln x_0$，即 $\mathrm{e}^{x_0}=\frac{1}{x_0}$，所以 $G(x)_{\max}=G(x_0)=\frac{\ln x_0+x_0+1}{x_0\mathrm{e}^{x_0}}=1$，

又 $m\geqslant\frac{\ln x+x+1}{x\mathrm{e}^x}-1$ 恒成立，即 $m\geqslant1-1=0$，所以 $m\geqslant0$，所以实数 m 的取值范围为$[0,+\infty)$.

17.**解**：(1)$\cos B=\frac{c^2+a^2-4}{2ac}=\frac{1}{2}$，………………………………………………………… 2 分

由 $0<B<\pi$，得 $B=\frac{\pi}{3}$.………………………………………………………………………… 4 分

(2)由(1)知 $B=\frac{\pi}{3}$，得 $A+C=\frac{2\pi}{3}$，故 $A=\frac{2\pi}{3}-C$，………………………………………… 6 分

由正弦定理$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}$，得

$\frac{a}{c}=\frac{\sin A}{\sin C}=\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{3}-C\right)}{\sin C}=\frac{\sin\frac{2\pi}{3}\cos C-\cos\frac{2\pi}{3}\sin C}{\sin C}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\frac{1}{2}$，……………………………………… 9 分

又由$\triangle ABC$ 为锐角三角形，得$\begin{cases}0<C<\frac{\pi}{2},\\0<\frac{2\pi}{3}-C<\frac{\pi}{2},\end{cases}$ 解得$\frac{\pi}{6}<C<\frac{\pi}{2}$，$\therefore\tan C\in\left(\frac{\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$，$\therefore\frac{a}{c}=\frac{\sqrt{3}}{2\tan C}+\frac{1}{2}\in\left(\frac{1}{2},2\right)$. … 12 分

18.(1)**证明**：由题意知，$AB\parallel CD$，$BC\perp CD$，$AB=2CD=2\sqrt{2}$，$\angle CBD=45^\circ$，$BC=AE=DE$，

故有 $BC=DC=\sqrt{2}$，易得 $AE=DE=\sqrt{2}$，$BD=2$，$AD=\sqrt{BC^2+(AB-CD)^2}=\sqrt{2+2}=2$，

在$\triangle ABD$ 中，$\because AD^2+BD^2=AB^2$，

$\therefore BD \perp AD$. ………………………………………………………………………………………… 2 分

因为四边形 $BDEN$ 为矩形,则 $BD \perp DE$, ………………………………………………………………… 3 分

又 $DE \cap AD = D$, $DE \subset$ 平面 ADE, $AD \subset$ 平面 ADE,

故 $BD \perp$ 平面 ADE. …………………………………………………………………………………… 4 分

因为 $AE \subset$ 平面 ADE,所以 $BD \perp AE$. ……………………………………………………………… 5 分

(2)**解**:存在点 Q,使得直线 BE 与平面 QAD 所成的角为 $60°$,此时点 Q 为线段 EN 的中点或在线段 EN 上距离点 E 的 $\frac{1}{14}$ 处. ……………………………………………………………………………………………… 6 分

证明如下:以点 D 为坐标原点,建立如图所示的空间直角坐标系,

则 $D(0,0,0)$, $A(2,0,0)$, $B(0,2,0)$, $E(1,0,1)$,

所以 $\overrightarrow{DB}=(0,2,0)$, $\overrightarrow{DA}=(2,0,0)$, $\overrightarrow{BE}=(1,-2,1)$

设 $\overrightarrow{EQ}=\lambda\overrightarrow{EN}=\lambda\overrightarrow{DB}=\lambda(0,2,0)$,其中 $0\leqslant\lambda\leqslant1$,

解得 $Q(1,2\lambda,1)$,故 $\overrightarrow{DQ}=(1,2\lambda,1)$, …………………………………………………… 8 分

设平面 QAD 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

则 $\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DA}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{DQ}=0,\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x=0,\\ x+2\lambda y+z=0,\end{cases}$

令 $y=1$,则 $z=-2\lambda$,故 $n=(0,1,-2\lambda)$,

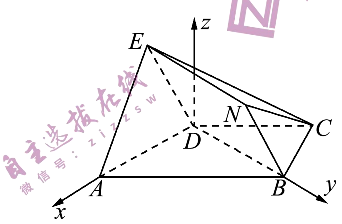
已知直线 BE 与平面 QAD 所成的角为 $60°$,

故 $\sin 60° = |\cos\langle\overrightarrow{BE},\boldsymbol{n}\rangle| = \dfrac{|\overrightarrow{BE}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\overrightarrow{BE}||\boldsymbol{n}|} = \dfrac{|-2-2\lambda|}{\sqrt{1+4\lambda^2}\times\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

解得 $\lambda=\frac{1}{2}$ 或 $\lambda=\frac{1}{14}$, ……………………………………………………………………… 11 分

故存在点 Q,使得直线 BE 与平面 QAD 所成的角为 $60°$,

此时点 Q 为线段 EN 的中点或在线段 EN 上距离点 E 的 $\frac{1}{14}$ 处. ……………………………………… 12 分



19.**解**:(1)由题意,得 $\bar{x}=\frac{1}{5}\times(1+2+4+8+10)=5$, $\bar{y}=\frac{1}{5}\times(12+10+7+6+5)=8$, ………………… 2 分

$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\cdot\bar{y}=158-200=-42$, $\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2=60$,

$\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\bar{x}\cdot\bar{y}}{\sum_{i=1}^{5}(x_i-\bar{x})^2}=-0.7$. ……………………………………………………………………… 4 分

$\hat{a}=8+0.7\times5=11.5$,

所以所求回归方程是 $\hat{y}=-0.7x+11.5$. ………………………………………………………………… 6 分

(2) 列出残差表:

$y_i-\hat{y}_i$	1.2	−0.1	−1.7	0.1	0.5
$y_i-\bar{y}$	4	2	−1	−2	−3

……… 9 分

所以 $\sum_{i=1}^{5}(y_i-\hat{y}_i)^2=4.6$, $\sum_{i=1}^{5}(y_i-\bar{y})^2=34$, $R^2\approx0.865$, $\therefore 0.8<R^2<0.9$,

所以回归模型的拟合效果良好. ………………………………………………………………………………………… 12 分

20.**解**:(1)根据题意得$\begin{cases}\dfrac{2a}{b}=2\sqrt{2},\\ \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{2}{b^2}=1,\end{cases}$ ………………………………………………………………………………… 2 分

解得$\begin{cases}b=2,\\ a=2\sqrt{2},\end{cases}$所以椭圆 C 的方程为$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{4}=1$. ……………………………………………………………… 4 分

(2)由题意得,$D(-4,0)$,

将直线 l 的方程 $x=my-4(m\neq 0)$代入椭圆 C 的方程,整理得:$(m^2+2)y^2-8my+8=0$,

$\Delta=(8m)^2-4(m^2+2)\cdot 8=32m^2-64$,

由 $\Delta>0$ 得 $m^2>2,|m|>\sqrt{2}$,

设 $P(x_1,y_1),Q(x_2,y_2)$,由韦达定理可得$\begin{cases}y_1+y_2=\dfrac{8m}{m^2+2},\\ y_1y_2=\dfrac{8}{m^2+2},\end{cases}$ …………………………………………………… 6 分

设$\dfrac{|DP|}{|DQ|}=\dfrac{|PM|}{|MQ|}=\lambda$,$\therefore \lambda=\dfrac{y_1}{y_2}$,$\overrightarrow{PM}=\lambda\overrightarrow{MQ}$,即$(x_M-x_1,y_M-y_1)=\lambda(x_2-x_M,y_2-y_M)$,

$\therefore y_M=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}=\dfrac{2y_1y_2}{y_1+y_2}$, ……………………………………………………………………………………… 9 分

所以$\triangle ODM$ 的面积$S=\dfrac{1}{2}\times|OD|\cdot|y_M|=2|y_M|=\dfrac{4y_1y_2}{|y_1+y_2|}=\dfrac{4}{|m|}$. ………………………………………… 11 分

$\because |m|>\sqrt{2}$,

$\therefore \triangle ODM$ 的面积$S=\dfrac{4}{|m|}\in(0,2\sqrt{2})$. ……………………………………………………………………………………… 12 分

21.(1)**解**:$\because f(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2$,

$\therefore f'(x)=e^x-x$,$\therefore f'(1)=e-1$, ……………………………………………………………………………………………… 1 分

$\therefore f(1)=e-\dfrac{1}{2}$,故切点坐标为$\left(1,e-\dfrac{1}{2}\right)$, ……………………………………………………………………………… 2 分

故曲线 $y=f(x)$在点$(1,f(1))$处的切线方程为$y-\left(e-\dfrac{1}{2}\right)=(e-1)(x-1)$即 $2(e-1)x-2y+1=0$. ………………… 4 分

(2)证明:因为 $f(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2$,$g(x)=f(x)+3x+1$,

所以 $g(x)=e^x-\dfrac{1}{2}x^2+3x+1$,则 $g'(x)=e^x-x+3$.

令 $\varphi(x)=e^x-x+3$,则 $\varphi'(x)=e^x-1$,

显然 $\varphi'(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. ………………………………………………………………………………………………… 5 分

当 $x<0$ 时,$\varphi'(x)<0$,当 $x>0$ 时,$\varphi'(x)>0$,

则 $\varphi(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,在$(0,+\infty)$上单调递增,

则 $\varphi(x)_{\min}=\varphi(0)=4>0$,所以 $g'(x)>0$,

于是得 $g(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增. …………………………………………………………………………………………………… 6 分

令函数 $F(x)=g(x)+g(-x)=e^x+e^{-x}-x^2+2$,

$\therefore F'(x)=e^x-e^{-x}-2x$,

令 $G(x)=e^x-e^{-x}-2x$,则 $G'(x)=e^x+e^{-x}-2\geqslant 2\sqrt{e^x\cdot e^{-x}}-2=0$,当且仅当 $x=0$ 时取等号, ……………… 8 分

所以 $G(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,

而 $G(0)=0$,即当 $x<0$ 时,$F'(x)=G(x)<0$,

当 $x>0$ 时,$F'(x)=G(x)>0$,

因此,$F(x)$在$(-\infty,0)$上单调递减,在$(0,+\infty)$上单调递增,

$F(x)_{\min}=F(0)=4$, ………………………………………………………… 10 分

从而有 $\forall x\in\mathbf{R},g(x)+g(-x)\geqslant 4$,

因为 $x_1\geqslant -x_2$,

故 $g(x_1)\geqslant g(-x_2)\Leftrightarrow g(x_1)+g(x_2)\geqslant g(x_2)+g(-x_2)\geqslant 4$,

所以当 $x_1+x_2\geqslant 0$ 时,$g(x_1)+g(x_2)\geqslant 4$. ………………………………………… 12 分

22.**解**:(1)根据题意,消去参数 t,可得

直线 l 的普通方程为:$2x-y+a-3=0$. ……………………………………………… 2 分

因为曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=8\cos\theta-4\sin\theta$,

变形可得:$\rho^2=8\rho\cos\theta-4\rho\sin\theta$, ……………………………………………… 3 分

$\because \rho^2=x^2+y^2,\rho\cos\theta=x,\rho\sin\theta=y,\therefore x^2+y^2=8x-4y$,

故曲线 C 的直角坐标方程为:$(x-4)^2+(y+2)^2=20$. ………………………………… 5 分

(2)由(1)可知曲线 C 的圆心 $C(4,-2)$,$r=2\sqrt{5}$,若曲线 C 上有且仅有三个点到直线 l 的距离为$\sqrt{5}$,

则圆心 C 到直线 l 的距离为 $d=r-\sqrt{5}=2\sqrt{5}-\sqrt{5}=\sqrt{5}$, …………………………… 7 分

$\because$直线 l 为 $2x-y+a-3=0$,$\therefore d=\dfrac{|2\times 4+2+a-3|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$, ……………………… 9 分

$\therefore |a+7|=5$,$\therefore a=-2$ 或 $a=-12$. ……………………………………………… 10 分

23.**解**:(1)当 $a=1$ 时,$f(x)=3|x-1|+\sqrt{(3x-1)^2}=3|x-1|+|3x-1|$,

$$f(x)=\begin{cases}-6x+4, & x\leqslant\dfrac{1}{3},\\ 2, & \dfrac{1}{3}<x<1,\\ 6x-4, & x\geqslant 1,\end{cases}$$ ……………………………………………… 2 分

当 $x\leqslant\dfrac{1}{3}$时,$-6x+4\leqslant 8$,即$-\dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{3}$,

当$\dfrac{1}{3}<x<1$ 时,$2\leqslant 8$ 恒成立,即$\dfrac{1}{3}<x<1$,

当 $x\geqslant 1$ 时,$6x-4\leqslant 8$,即 $1\leqslant x\leqslant 2$,

综上,不等式的解集为$\left\{x\,\middle|\,-\dfrac{2}{3}\leqslant x\leqslant 2\right\}$. ……………………………………………… 5 分

(2)$f(x)=3|x-1|+\sqrt{(3x-a)^2}=|3x-3|+|3x-a|\geqslant|(3x-3)-(3x-a)|=|a-3|$,

若 $f(x)$的最小值为 0,则$|a-3|=0$,解得 $a=3$, ………………………………………… 7 分

$\therefore x^2+2y^2+3z^2=3$,

$\therefore xz+2yz\leqslant\dfrac{x^2+z^2}{2}+y^2+z^2=\dfrac{x^2+2y^2+3z^2}{2}=\dfrac{3}{2}$, ……………………………… 9 分

当且仅当 $x=y=z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时等号成立,

故 $xz+2yz$ 的最大值为$\dfrac{3}{2}$. ……………………………………………………… 10 分