

绝密★考试结束前

220 名校联盟（浙江省名校新高考研究联盟）2023 届高三第二次联考

## 数学试题卷

命题：嘉兴一中 刘 舸、冯 霄

审题：黄岩中学 王海田 慈溪中学 应勤俭 元济高级中学 张艳宗 校稿：黄桂风、叶德祥

### 注意事项：

1. 答卷前，务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上。
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。
3. 请保持答题卡的整洁。考试结束后，将试卷和答题卡一并交回。

### 选择题部分

一、选择题：本题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 已知集合  $A = \{x | 2x + 8 > 0\}$ ， $B = \{x | 3^x < 9\}$ ，则  $A \cap B =$   
A.  $\emptyset$                       B.  $\mathbb{R}$                       C.  $\{x | x > -4\}$                       D.  $\{x | -4 < x < 2\}$
2. 若  $1 + 2i = iz$  ( $i$  为虚数单位)，则  $|z| =$   
A. 5                              B.  $\sqrt{5}$                               C.  $\sqrt{3}$                               D.  $\sqrt{2}$
3. 已知一组样本数据  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  的平均数为  $a$ ，由这组数据得到另一组新的样本数据  $y_1, y_2, \dots, y_{10}$ ，其中  $y_i = x_i - 2$  ( $i = 1, 2, \dots, 10$ )，则  
A. 两组样本数据的平均数相同  
B. 两组样本数据的方差不相同  
C. 两组样本数据的极差相同  
D. 将两组数据合成一个样本容量为 20 的新的样本数据，该样本数据的平均数为  $a - 2$
4. 已知多项式  $(x-2)^5 + (x-1)^6 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_5x^5 + a_6x^6$ ，则  $a_1 =$   
A. 11                              B. 74                              C. 86                              D. -1
5. 已知  $\triangle ABC$  是边长为 1 的正三角形， $\overline{BD} = 2\overline{DC}$ ， $\overline{AB} + \overline{AC} = 2\overline{AE}$ ，则  $\overline{AE} \cdot \overline{AD} =$   
A.  $\frac{3}{4}$                               B.  $\frac{3}{2}$                               C.  $\frac{3}{8}$                               D. 1
6. 已知正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  的棱长为 1， $P$  是线段  $B_1D_1$  上的动点，则三棱锥  $P - A_1BD$  的体积为  
A.  $\frac{1}{8}$                               B.  $\frac{1}{6}$                               C.  $\frac{1}{5}$                               D.  $\frac{1}{4}$
7. 已知直角  $\triangle ABC$  的直角顶点  $A$  在圆  $D: (x-3)^2 + (y-2)^2 = 1$  上，若点  $B(-1, 0)$ ， $C(a, 0)$ ，则  $a$  的取值范围为  
A.  $\left[\frac{12}{5}, \frac{17}{5}\right]$                       B.  $\left[\frac{14}{5}, \frac{17}{5}\right]$                       C.  $\left[\frac{14}{5}, \frac{16}{3}\right]$                       D.  $\left[\frac{14}{3}, \frac{16}{3}\right]$

220 名校联盟（浙江省名校新高考研究联盟）2023 届高三第二次联考 数学试题卷 第 1 页 共 4 页

8. 已知  $a = \sin \frac{\pi}{e}$ ,  $b = \frac{2}{e}$ ,  $c = \frac{\ln \pi}{\sqrt{\pi}}$  ( $e$  为自然对数的底数), 则

- A.  $a > b > c$                       B.  $b > c > a$                       C.  $c > a > b$                       D.  $b > a > c$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 在每小题给出的四个选项中, 有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分.

9. 已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  与直线  $l: x - 2y + 5 = 0$  有公共点, 则  $P$  的值可以是

- A. 2                                      B. 3                                      C. 4                                      D. 5

10. 已知函数  $f(x) = \sqrt{3} \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ , 将函数  $f(x)$  的图象向右平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度, 再

把横坐标缩小为原来的  $\frac{1}{2}$  (纵坐标不变), 得到函数  $y = g(x)$  的图象, 则

- A.  $f(x)$  的周期为  $\pi$                       B.  $f(x)$  为奇函数  
C.  $g(x)$  的图象关于点  $\left(\frac{17\pi}{24}, 0\right)$  对称                      D. 当  $x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$  时,  $g(x)$  的取值范围为  $\left[-1, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

11. 新型冠状病毒肺炎 (Corona Virus Disease 2019, COVID-19), 简称“新冠肺炎”, 世界卫生组织命名为“2019 冠状病毒病”, 是指 2019 新型冠状病毒感染导致的肺炎. 用核酸检测的方法可以诊断是否患有新冠, 假设  $P(A|B) = 0.99$ ,  $P(\bar{A}|\bar{B}) = 0.999$ , 其中随机事件  $A$  表示“某次核酸检测被检验者阳性”, 随机事件  $B$  表示“被检验者患有新冠”, 现某人群中  $P(B) = 0.01$ , 则在该人群中

- A. 每 100 人必有 1 人患有新冠  
B. 若  $P(\bar{B}|\bar{A}) = 0.99$ , 则事件  $A$  与事件  $B$  相互独立  
C. 若某人患有新冠, 则其核酸检测为阳性的概率为 0.999  
D. 若某人没患新冠, 则其核酸检测为阳性的概率为 0.001

12. 已知函数  $f(x)$  及其导函数  $f'(x)$  的定义域均为  $\mathbb{R}$ , 记  $g(x) = f'(x)$ . 若  $f(2x+1) - 2x$  与  $g(x+2)$  均为偶函数, 则

- A.  $g(1) = 1$                                       B. 函数  $\frac{f(x+1)}{x}$  的图象关于点  $(0, 1)$  对称  
C. 函数  $g(x)$  的周期为 2                      D.  $\sum_{k=1}^{2024} [g(k) - 1][g(k+1) + 1] = 0$

### 非选择题部分

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 若实数  $b > a > 1$ , 且  $\log_a b + \log_b a = \frac{10}{3}$ , 则  $3 \ln a - \ln b =$   $\blacktriangle$ .

14. 我国南宋时期著名的数学家秦九韶在其著作《数书九章》中, 提出了已知三角形三边长求三角形面积的公式. 在  $\triangle ABC$  中, 设  $a, b, c$  分别为  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  的对边,  $S$  表示  $\triangle ABC$  的面积,

其公式为  $S = \frac{1}{4} \left[ a^2 b^2 - \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} \right)^2 \right]$ . 若  $\frac{2\sqrt{3}}{\sin B} = \frac{a}{\sin C}$ ,  $b = \sqrt{3}$ ,  $S = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 则  $c =$   $\blacktriangle$ .

15. 已知实数  $a > b > 1$ , 满足  $a + \frac{1}{a-1} \geq b + \frac{1}{b-1}$ , 则  $a + 4b$  的最小值是  $\blacktriangle$ .



16. 已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的右焦点为  $F$ , 过坐标原点  $O$  的直线  $l$  与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点. 在  $\triangle AFB$  中,  $\angle AFB = 120^\circ$ , 且满足  $S_{\triangle AFB} \geq \frac{1}{2}ac$ , 则椭圆  $C$  的离心率  $e$  的取值范围为\_\_\_\_\_.

四、解答题: 本题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (10 分) 已知正项数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 且满足  $2\sqrt{S_n} = a_n + 1 (n \in \mathbb{N}^*)$ .

- (1) 求数列  $\{a_n\}$  的通项公式;  
(2) 若数列  $\{b_n\}$  为等比数列, 且  $b_1 = a_1, b_2 = a_2$ , 求数列  $\{(a_n + 1) \cdot b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$ .

18. (12 分) 已知半圆  $O$  的直径  $AB = 2$ , 点  $C$  为圆弧上一点 (异于点  $A, B$ ), 过点  $C$  作  $AB$  的垂线, 垂足为  $D$ .

- (1) 若  $AC = \sqrt{3}$ , 求  $\triangle MCD$  的面积;

- (2) 求  $\frac{|AC| + |CD|}{|AC| + |AD|}$  的取值范围.

19. (12 分) “体育强则国家强, 国运兴则体育兴”, 多参加体育运动能有效增强中学生的身体素质. 篮球和排球是我校学生最为喜爱的两项运动, 为调查喜爱运动项目与性别之间的关系, 某调研组在校内随机采访男生、女生各 50 人, 每人必须从篮球和排球中选择最喜爱的一项, 其中喜爱排球的归为甲组, 喜爱篮球的归为乙组, 调查发现甲组成员 48 人, 其中男生 18 人.

- (1) 根据以上数据, 填空下述  $2 \times 2$  列联表:

	甲组	乙组	合计
男生			
女生			
合计			

- (2) 根据以上数据, 能否有 95% 的把握认为学生喜欢排球还是篮球与“性别”有关?  
(3) 现从调查的女生中按分层抽样的方法选出 5 人组成一个小组, 抽取的 5 人中再随机抽取 3 人发放礼品, 求这 3 人中在甲组中的人数  $X$  的概率分布列及其数学期望.

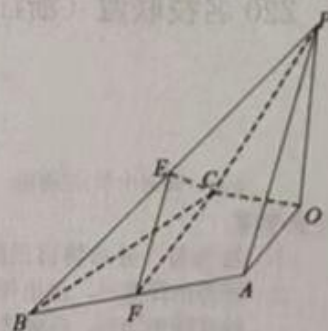
参考公式:  $K^2 = \frac{n(ad - bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$ , 其中  $n = a + b + c + d$  为样本容量.

参考数据:

$P(K^2 \geq k_0)$	0.50	0.05	0.01
$k_0$	0.455	3.841	6.635

20. (12分) 如图, 在四棱锥  $P-OABC$  中, 已知  $OA=OP=1$ ,  $CP=2$ ,  $AB=4$ ,  $\angle CPO = \frac{\pi}{3}$ ,  $\angle ABC = \frac{\pi}{6}$ ,  $\angle AOC = \frac{\pi}{2}$ ,  $E$  为  $PB$  中点,  $F$  为  $AB$  中点.

- (1) 证明: 平面  $CEF \parallel$  平面  $PAO$ ;  
(2) 若  $PA = \sqrt{3}$ , 求平面  $POC$  与平面  $PAB$  所成夹角的余弦值.



21. (12分) 已知双曲线  $E$  的顶点为  $A(-1,0)$ ,  $B(1,0)$ , 过右焦点  $F$  作其中一条渐近线的平行线, 与另一条渐近线交于点  $G$ , 且  $S_{\triangle OFG} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$ . 点  $P$  为  $x$  轴正半轴上异于点  $B$  的任意点, 过点  $P$  的直线  $l$  交双曲线于  $C, D$  两点, 直线  $AC$  与直线  $BD$  交于点  $H$ .

- (1) 求双曲线  $E$  的标准方程;  
(2) 求证:  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OH}$  为定值.

22. (12分) 已知  $\lambda$  为正实数, 函数  $f(x) = \ln(\lambda x + 1) - \lambda x + \frac{x^2}{2}$  ( $x > 0$ ).

- (1) 若  $f(x) > 0$  恒成立, 求  $\lambda$  的取值范围;  
(2) 求证:  $2\ln(n+1) - \frac{5}{3} < \sum_{i=1}^n \left(\frac{2}{i} - \frac{1}{i^2}\right) < 2\ln(n+1)$  ( $i=1, 2, 3, \dots$ ).

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线