

宣城市 2022—2023 学年度第二学期期末调研测试

高二数学参考答案

一、单选题(本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分. 在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.)

题 号	1	2	3	4	5	6	7	8
答 案	A	B	C	C	D	D	C	A

二、多选题(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 在每小题给出的选项中,有多项符合题目要求. 全部选对的得 5 分,部分选对的得 2 分,有选错的得 0 分.)

题 号	9	10	11	12
答 案	AD	ABD	BCD	AC

三、填空题:(本题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.)

13. $(-3, -4)$ 14. $\frac{\sqrt{6}}{3}$ 15. $(2 - \sqrt{3}, 1) \cup (1, 2 + \sqrt{3})$ 16. $\frac{30}{13}$

四、解答题(本题共 6 小题,共 70 分,其中第 17 题 10 分,其它每题 12 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

17. (本小题 10 分)

解:(1) $(a + c)(\sin A + \sin C) = b\sin B + 3a\sin C$,

由正弦定理得 $(a + c)^2 = b^2 + 3ac$, 所以 $b^2 = a^2 + c^2 - ac$,

所以 $\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{ac}{2ac} = \frac{1}{2}$,

因为 $0 < B < \pi$, 所以 $B = \frac{\pi}{3}$; 4 分

(2) 由(1)得 $B = \frac{\pi}{3}$ 因为 AC 边上中线长为 $\frac{\sqrt{7}}{2}$, $a = 2$,

设 AC 中点为 D, 所以 $\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$,

所以 $\overrightarrow{BD}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA}^2 + \overrightarrow{BC}^2 + 2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC})$, 即 $\frac{7}{4} = \frac{1}{4}(c^2 + a^2 + 2c \cdot a \cdot \cos B)$,

所以 $\frac{7}{4} = \frac{1}{4}(c^2 + 4 + 2c \cdot 2 \cdot \cos B)$,

又因为 $B = \frac{\pi}{3}$, 所以 $7 = c^2 + 4 + 2c$, 解得 $c = 1$,

所以 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{\sqrt{3}}{4}ac = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 10 分

18. (本小题 12 分)

解:(1) 当 $n = 1$ 时, $a_2 = S_1 + 3 = 4$, 当 $n \geq 2$ 时,

因为 $a_{n+1} = S_n + 3$, ① 所以 $a_n = S_{n-1} + 3 (n \geq 2)$ ②

① - ② 得 $a_{n+1} - a_n = a_n$, 即 $a_{n+1} = 2a_n (n \geq 2)$, 所以 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 2 (n \geq 2)$

宣城市高二数学参考答案第1页(共4页)

又因为 $a_1 = 1$, 所以 $\frac{a_2}{a_1} = 4$,

所以, 当 $n \geq 2$ 时, $\{a_n\}$ 是以 4 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以 $a_n = 4 \times 2^{n-2} = 2^n$.

所以 $a_n = \begin{cases} 1, & n=1 \\ 2^n, & n \geq 2 \end{cases}$ 6 分

(2) 因为 $b_n = \log_2 a_n$, 所以, 当 $n=1$ 时, $b_1 = \log_2^1 = \log_2^1 = 0$,

当 $n \geq 2$ 时, $b_n = \log_2^{2^n} = \log_2^{2^n} = n$, 所以 $b_n = \begin{cases} 0, & n=1 \\ n, & n \geq 2 \end{cases}$

所以 $c_n = \begin{cases} 0, & n=1 \\ n \cdot 2^n, & n \geq 2 \end{cases}$, 则数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n .

当 $n=1$ 时, $T_1 = a_1 \cdot b_1 = 0$

当 $n \geq 2$ 时, $T_n = 0 \times 1 + 2 \times 2^2 + 3 \times 2^3 + \cdots + (n-1) \times 2^{n-1} + n \times 2^n$ ①

$$2T_n = 0 \times 2 + 2 \times 2^3 + 3 \times 2^4 + \cdots + (n-1) \times 2^n + n \times 2^{n+1} \text{ ②,}$$

① - ②得

$$-T_n = 2^3 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n - n \times 2^{n+1}$$

$$-T_n = 2 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^n - n \times 2^{n+1}$$

$$-T_n = 2 + \frac{2(1-2^n)}{1-2} - n \times 2^{n+1}$$

所以 $T_n = (n-1) \times 2^{n+1}$. 当 $n=1$ 时, $T_1 = c_1 = 0$ 也满足.

故数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 $T_n = (n-1) \times 2^{n+1}$ 12 分

19. (本题满分 12 分)

解: (1) 由已知, 有 $P(A) = \frac{C_2^2 C_3^2 + C_3^2 C_3^2}{C_8^4} = \frac{6}{35}$, 所以事件 A 发生的概率为 $\frac{6}{35}$ 4 分

(2) 随机变量 X 的所有可能取值为 1, 2, 3, 4.

$$P(X=1) = \frac{C_5^1 C_3^3}{C_8^4} = \frac{1}{14}, P(X=2) = \frac{C_5^2 C_3^2}{C_8^4} = \frac{3}{7}, P(X=3) = \frac{C_5^3 C_3^1}{C_8^4} = \frac{3}{7}, P(X=4) =$$

$$\frac{C_5^4 C_3^0}{C_8^4} = \frac{1}{14}.$$

所以随机变量 X 的分布列为

X	1	2	3	4
P	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{14}$

$$\text{所以 } E(X) = 1 \times \frac{1}{14} + 2 \times \frac{3}{7} + 3 \times \frac{3}{7} + 4 \times \frac{1}{14} = \frac{5}{2} \text{ 12 分}$$

20. (本小题 12 分)

(1) 证明: 在 $\triangle ABD$ 中, $AB = AD = 4$,

因为 O 是 BD 的中点, 所以 $OA \perp BD$, 且 $OB = OD = 2$, $OA = 2\sqrt{3}$.

在 $\triangle BCD$ 中, 因为 $BC^2 + CD^2 = BD^2$, 所以 $BC \perp CD$.

因为 $BC = CD = 2\sqrt{2}$, O 为 BD 的中点, 所以 $CO \perp BD$ 且 $OC = 2$.

在 $\triangle AOC$ 中, 因为 $OA^2 + OC^2 = AC^2$, 所以 $OA \perp OC$.

因为 $BD \cap OC = O$, $BD, OC \subset$ 平面 BCD , 所以 $OA \perp$ 平面 BCD 5 分

(2) 解: 建立如图所示空间直角坐标系 $O-xyz$, $A(0, 0, 2\sqrt{3})$, $B(0, -2, 0)$, $C(2, 0, 0)$, $D(0, 2, 0)$,

$$\vec{DC} = (2, -2, 0), \vec{AB} = (0, -2, -2\sqrt{3}), \vec{AD} = (0, 2, -2\sqrt{3}),$$

宣城市高二数学参考答案第 2 页 (共 4 页)

设 $\vec{DE} = \lambda \vec{DC}$, 则 $\vec{DE} = (2\lambda, -2\lambda, 0)$, $\vec{AE} = \vec{AD}$

$$+ \vec{DE} = (2\lambda, 2 - 2\lambda, -2\sqrt{3})$$

设平面 ABE 的一个法向量为 $\vec{m} = (x, y, z)$,

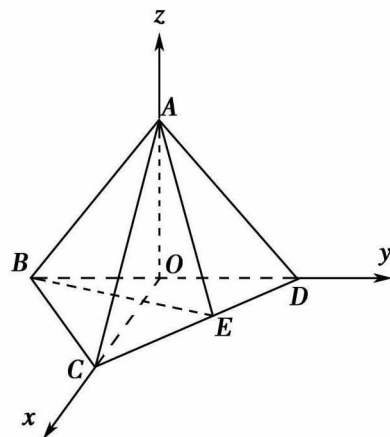
$$\text{由 } \begin{cases} \vec{m} \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{m} \cdot \vec{AE} = 0 \end{cases} \text{ 得,}$$

$$\begin{cases} -2y - 2\sqrt{3}z = 0 \\ 2\lambda x + (2 - 2\lambda)y - 2\sqrt{3}z = 0 \end{cases}, \text{ 令 } z = \sqrt{3}, \text{ 得 } y = -3, x = \frac{6}{\lambda} - 3, \text{ 所以 } \vec{m} = \left(\frac{6}{\lambda} - 3, -3, \sqrt{3} \right).$$

取平面 ABD 的一个法向量 $\vec{n} = (1, 0, 0)$,

$$\text{所以 } \cos 30^\circ = |\cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle| = \frac{\left| \frac{6}{\lambda} - 3 \right|}{\sqrt{\left(\frac{6}{\lambda} - 3 \right)^2 + 3 + 9}} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ 因为 } \lambda > 0, \text{ 所以 } \lambda = \frac{2}{3}$$

$$\text{所以 } \frac{DE}{DC} = \frac{2}{3} \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$



21. (本小题 12 分)

解:(1) 因为点 $(\sqrt{6}, 1)$ 在 C 上, 所以 $\frac{6}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$ ①, 由题意知 $2c = 4, c = 2$, 所以 $a^2 + b^2 = 4$ ②,

由①②解得 $a^2 = 3, b^2 = 1$, 故双曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$. $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) 方法一: 设直线 l 的方程为 $x = my + 2$,

$$\text{由 } \begin{cases} x = my + 2 \\ \frac{x^2}{3} - y^2 = 1 \end{cases} \text{ 消去 } x \text{ 得, } (m^2 - 3)y^2 + 4my + 1 = 0$$

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \text{ 则 } y_1 + y_2 = \frac{-4m}{m^2 - 3}, y_1 y_2 = \frac{1}{m^2 - 3},$$

$$\text{因为为 } k_{BM} + k_{BN} = \frac{y_1}{x_1 - \frac{3}{2}} + \frac{y_2}{x_2 - \frac{3}{2}} = \frac{y_1}{my_1 + \frac{1}{2}} + \frac{y_2}{my_2 + \frac{1}{2}} = \frac{2y_1}{2my_1 + 1} + \frac{2y_2}{2my_2 + 1} =$$

$$\frac{8my_1 y_2 + 2(y_1 + y_2)}{4m^2 y_1 y_2 + 2m(y_1 + y_2) + 1} = \frac{\frac{8m}{m^2 - 3} - \frac{8m}{m^2 - 3}}{\frac{4m^2}{m^2 - 3} + \frac{-8m^2}{m^2 - 3} + 1} = 0, \text{ 所以 } \tan \angle MBF + \tan(\pi - \angle NBF) = 0, \text{ 所以 } \tan \angle MBF =$$

$\tan \angle NBF$. 所以 $\angle MBF = \angle NBF$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

方法二: 证明: 当直线 l 的斜率不存在时, M, N 关于 x 轴对称, 结论显然成立

当直线 l 的斜率 k 存在时, 设直线 l 的方程为 $y = k(x - 2)$,

$$\text{联立 } \begin{cases} y = k(x - 2) \\ \frac{x^2}{3} - y^2 = 1 \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得, } (1 - 3k^2)x^2 + 12k^2x - 12k^2 - 3 = 0, \text{ 显然 } 1 - 3k^2 \neq 0,$$

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \text{ 则 } x_1 + x_2 = \frac{-12k^2}{1 - 3k^2}, x_1 x_2 = \frac{-12k^2 - 3}{1 - 3k^2},$$

宣城市高二数学参考答案第3页(共4页)

$$\begin{aligned} \text{因为 } k_{BM} + k_{BN} &= \frac{y_1}{x_1 - \frac{3}{2}} + \frac{y_2}{x_2 - \frac{3}{2}} = \frac{k(x_1 - 2)}{x_1 - \frac{3}{2}} + \frac{k(x_2 - 2)}{x_2 - \frac{3}{2}} \\ &= \frac{k[2x_1x_2 - \frac{7}{2}(x_1 + x_2) + 6]}{x_1x_2 - \frac{3}{2}(x_1 + x_2) + \frac{9}{4}} \\ &= \frac{k[2(-12k^2 - 3) + \frac{7}{2} \times 12k^2 + 6(1 - 3k^2)]}{-12k^2 - 3 + \frac{3}{2} \times 12k^2 + \frac{9}{4}(1 - 3k^2)} = 0, \end{aligned}$$

所以 $\tan \angle MBF + \tan(\pi - \angle NBF) = 0$, 所以 $\tan \angle MBF = \tan \angle NBF$.

所以 $\angle MBF = \angle NBF$ 12 分

22. (本小题 12 分)

解: (1) 由题可知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f(x) = x^2 + x - \ln x$

$$f'(x) = 2x + 1 - \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + x - 1}{x} = \frac{(2x - 1)(x + 1)}{x}$$

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = -1$ (舍去)

x	$(0, \frac{1}{2})$	$\frac{1}{2}$	$(\frac{1}{2}, +\infty)$
$f'(x)$	-	0	+
$g(x)$	单调递减	极小值	单调递增

所以 $f(x)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 上单调递减, $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增. 5 分

(2) $f(x) = x^2 + x - \ln x$,

要证明 $f(x) + e^x > x^2 + x + 2$, 只用证明 $e^x - \ln x - 2 > 0$,

令 $g(x) = e^x - \ln x - 2$, $g'(x) = e^x - \frac{1}{x}$,

令 $g'(x) = e^x - \frac{1}{x}$, 即 $e^x = \frac{1}{x}$, 可得方程有唯一解为 x_0 ($x_0 > 0$ 且 $x_0 \neq 1$), 所以

$$e^{x_0} = \frac{1}{x_0},$$

当 x 变化时, $g'(x)$ 与 $g(x)$ 的变化情况如下,

x	$(0, x_0)$	x_0	$(x_0, +\infty)$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	单调递减	极小值	单调递增

所以 $g(x)_{\min} = g(x_0) = e^{x_0} - \ln x_0 - 2 = \frac{1}{x_0} + x_0 - 2$,

因为 $\frac{1}{x_0} + x_0 - 2 \geq 2\sqrt{\frac{1}{x_0} \cdot x_0} - 2 = 0$, 因为 $x_0 \neq 1$, 所以不取等号,

即 $\frac{1}{x_0} + x_0 - 2 > 0$, 即 $g(x)_{\min} > 0$ 恒成立,

所以, $e^x - \ln x - 2 > 0$ 恒成立,

所以, 对 $\forall x > 0$, $f(x) + e^x > x^2 + x + 2$ 成立 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



微信搜一搜



自主选拔在线