2023年湖北省七市(州)高三年级3月联合统一调研测试
数学参考答案及评分标准

1. B 【解析】因为 $A=\{x\in\mathbf{Z}|x^2-x-2\leqslant 0\}=\{-1,0,1,2\}$, $B=\{x|y=\sqrt{x-1}\}=[1,+\infty)$,所以 $A\cap B=\{1,2\}$,所以 $A\cap B$ 的子集个数为 4. 故选 B.

2. A 【解析】由 $z(1+\mathrm{i})=3z-\mathrm{i}$,得 $z=\dfrac{\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}(2+\mathrm{i})}{5}=\dfrac{-1+2\mathrm{i}}{5}$,所以 $|z|=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$. 故选 A.

3. B 【解析】因为 $6\times 75\%=4.5$,所以 $n=6$. 所以 $(2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}})^6$ 展开式的通项为 $T_{r+1}=\mathrm{C}_6^r(2x)^{6-r}(-\dfrac{1}{\sqrt{x}})^r=\mathrm{C}_6^r\cdot 2^{6-r}\cdot(-1)^r\cdot x^{6-\frac{3}{2}r}$,令 $6-\dfrac{3}{2}r=0$ 得 $r=4$,所以展开式的常数项为 $\mathrm{C}_6^4\times 2^2\times(-1)^4=60$. 故选 B.

4. C 【解析】截角四面体的体积为大正四面体的体积减去四个相等的小正四面体体积,所以 $V=\dfrac{\sqrt{2}}{12}\times 6^3-4\times\dfrac{\sqrt{2}}{12}\times 2^3=\dfrac{46\sqrt{2}}{3}$. 故选 C.

5. A 【解析】$\cos(30^\circ-\alpha)=1-2\sin^2(15^\circ-\dfrac{\alpha}{2})=1-2\cos^2(75^\circ+\dfrac{\alpha}{2})=1-\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$. 故选 A.

6. D 【解析】对 $y=\ln x-n+2$ 求导得 $y'=\dfrac{1}{x}$,由 $y'=\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 得 $x=\mathrm{e}$,则 $\dfrac{1}{\mathrm{e}}\cdot\mathrm{e}+m+1=\ln\mathrm{e}-n+2$,即 $m+n=1$. 所以 $\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n}=(m+n)(\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{n})=2+\dfrac{n}{m}+\dfrac{m}{n}\geqslant 2+2=4$,当且仅当 $m=n=\dfrac{1}{2}$ 时取等号. 故选 D.

7. A 【解析】因为 $\overrightarrow{CB}=3\overrightarrow{F_2A}$,所以 $\triangle F_1AF_2\backsim\triangle F_1BC$,设 $F_1F_2=2c$,则 $F_2C=4c$,设 $AF_1=t$,则 $BF_1=3t$, $AB=2t$. 因为 BF_2 平分 $\angle F_1BC$,由角分线定理可知,

$\dfrac{BF_1}{BC}=\dfrac{F_1F_2}{F_2C}=\dfrac{2c}{4c}=\dfrac{1}{2}$,所以 $BC=2BF_1=6t$,所以 $AF_2=\dfrac{1}{3}BC=2t$,

由双曲线定义知 $AF_2-AF_1=2a$,即 $2t-t=2a$, $t=2a$,①又由 $BF_1-BF_2=2a$ 得

$BF_2=3t-2a=2t$,所以 $BF_2=AB=AF_2=2t$,即 $\triangle ABF_2$ 是等边三角形,

所以 $\angle F_2BC=\angle ABF_2=60^\circ$. 在 $\triangle F_1BF_2$ 中,由余弦定理知

$\cos\angle F_1BF_2=\dfrac{BF_1^2+BF_2^2-F_1F_2^2}{2\cdot BF_1\cdot BF_2}$,即 $\dfrac{1}{2}=\dfrac{4t^2+9t^2-4c^2}{2\cdot 2t\cdot 3t}$,

化简得 $7t^2=4c^2$，把①代入上式得 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{7}$，所以离心率为$\sqrt{7}$. 故选 A.

8. C 【解析】因为 $g(x)=\log_3(3^x+1)-\frac{1}{2}x=\log_3(3^{\frac{x}{2}}+3^{-\frac{x}{2}})$为偶函数，且在$[0,+\infty)$单调递增，所以 $f(x)=\log_3(3^{x-1}+3)-\frac{1}{2}x=1+\log_3(3^{x-2}+1)-\frac{1}{2}x=\log_3(3^{x-2}+1)-\frac{1}{2}(x-2)=g(x-2)$，所以 $f(x)$关于直线 $x=2$ 对称，且在$[2,+\infty)$单调递增. 所以 $f(a-1)\geqslant f(2a+1)\Leftrightarrow|a-1-2|\geqslant|2a+1-2|$，两边平方，化简得$(a+2)(3a-4)\leqslant 0$，解得$-2\leqslant a\leqslant\frac{4}{3}$. 故选 C.

9. BC 【解析】对于 A，数据 $2x_1+1,2x_2+1,\cdots,2x_{20}+1$的方差为 $2^2\times 3=12$，所以 A 错误；对于 B，回归方程的直线斜率为负数，所以变量 x 与 y 呈负的线性相关关系，所以 B 正确；对于 C，由 $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)$，得 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$，故事件 A 与事件 B 独立，所以 C 正确；对于 D，由$\begin{cases}P(X=k)\geqslant P(X=k+1),\\P(X=k)\geqslant P(X=k-1),\end{cases}$解得 $k=3$ 或 $k=4$，所以 D 错误. 故选 BC.

10. AC 【解析】由 $f(0)=1\Rightarrow 2\sin\varphi=1$，即 $\sin\varphi=\frac{1}{2}$，而 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，由 $f(\frac{5}{2})=0\Rightarrow 2\sin(\frac{5}{2}\omega+\frac{\pi}{2})=0$，得$\frac{5}{2}\omega+\frac{\pi}{6}=\pi$(五点法)，所以 $\omega=\frac{\pi}{3}$，则 $f(x)=2\sin(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6})$. 对于 A，当 $x\in[2,4]$时，$\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{5\pi}{6},\frac{3\pi}{2}]$，此时函数 $y=f(x)$单调递减，所以 A 正确；对于 B，当$[3,6]$时，$\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{7\pi}{6},\frac{13\pi}{6}]$，所以 $\sin(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6})\in[-1,\frac{1}{2}]$，所以函数 $y=f(x)$在$[3,6]$上的值域为$[-2,1]$，所以 B 错误；对于 C，令$\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{2}$，得 $x=2$，由三角函数图象的对称性得 $x_1+x_2=2\times(-2)=-4$，所以 $\cos[\frac{\pi}{6}(x_2-x_1)]=\cos[\frac{\pi}{6}(-4-2x_1)]=\cos(\frac{\pi}{3}x_1+\frac{2\pi}{3})=-\sin(\frac{\pi}{3}x_1+\frac{\pi}{6})=\frac{3}{4}$，所以 C 正确；对于 D，$f'(x)=\frac{2\pi}{3}\cos(\frac{\pi}{3}x+\frac{\pi}{6})$，则 $f'(-1)=\frac{\sqrt{3}\pi}{3}$，所以 D 错误. 故选 AC.

11. BCD 【解析】对于 A，两条异面直线 D_1C 和 BC_1 所成的角即为 $\angle AD_1C=60^\circ$，所以 A 错误；对于 B，当点 P 与点 D_1 重合时，$C_1G /\!/ D_1E$，则 $C_1G /\!/$ 平面 BEP，所以 B 正确；对于 C，因为 $C_1C\perp BE$，$FC\perp BE$，所以 $BE\perp$ 平面 FCC_1，所以对任意点 P，平面 $FCC_1\perp$ 平面 BEP，所以 C 正确；对于 D，因为 $\cos\angle B_1D_1F=\dfrac{B_1D_1^2+FD_1^2-B_1F^2}{2\cdot B_1D_1\cdot FD_1}=\dfrac{6^2+(4\sqrt{2})^2-(2\sqrt{5})}{2\times 6\times 4\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，所以 $\angle B_1D_1F=45^\circ$，所以点 B_1 到直线 D_1F 的距离 $d=B_1D_1\sin\angle B_1D_1F=4\sqrt{2}=4\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=4$，所以 D 正确. 故选 BCD.

12. ACD 【解析】对于 A，若直线 l 与圆 M 相切，则 $\dfrac{|4k|}{\sqrt{1+k^2}}$，解得 $k=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{15}$，所以 A 正确；

对于 B，当时 $k=2$，$P(0,4)$，则 $S_{PAMB}=2S_{\triangle PAM}=AM\cdot PA=\sqrt{PM^2-1}=\sqrt{19}$，所以 B 错误；

对于 C，$P(0,2k)$，则直线 AB：$-2x+2ky+3=0$，所以直线 AB 经过定点 $N(\dfrac{3}{2},0)$，所以 C 正确；

对于 D，因为 $PM\perp AB$，所以点 C 的轨迹是以 MN 为直径的圆，即 $(x-\dfrac{7}{4})^2+y^2=\dfrac{1}{16}$，圆心 $R(\dfrac{7}{4},0)$，所以 $|CQ|=\dfrac{1}{4}$ 为定值，所以 D 正确. 故选 ACD.

13. $(3,3)$ 【解析】$\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 方向上的投影为 $\dfrac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}=\dfrac{6}{2}\boldsymbol{b}=(3,3)$. 故应填 $(3,3)$.

14. $\dfrac{4}{15}$ 【解析】记事件 A_i，B_i 分别表示第一次、第二次取到 i 号球，$i=1,2,3$，依题意 A_1，A_2，A_3 两两互斥，其和为 Ω，并且 $P(A_1)=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$，$P(A_2)=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$，$P(A_3)=\dfrac{1}{6}$，所以 $P(B_2|A_1)=\dfrac{1}{5}$，$P(B_2|A_2)=\dfrac{2}{5}$，$P(B_2|A_3)=\dfrac{1}{5}$，应用全概率公式，有 $P(B_2)=\sum\limits_{i=1}^{3}P(A_i)P(B_2|A_i)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{5}=\dfrac{4}{15}$. 故应填 $\dfrac{4}{15}$.

15. $[0,\dfrac{e^2}{4}]$ 【解析】由题意知，当 $x\in(-\infty,-2)$ 时，$f(x)<0$；当时 $x\in[-2,0]$ 时，$f(x)\geqslant 0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$f(x)\geqslant 0$. 当 $x\leqslant 0$ 时，$f(x)=-(x+2)(x-a)$，

结合图象知 $a\geqslant 0$；当 $x>0$ 时，$f(x)\geqslant 0\Leftrightarrow e^x-ax^2\geqslant 0$，当 $a=0$ 时，显然成立；

当 $a>0$ 时，$e^x-ax^2\geqslant 0\Leftrightarrow \frac{1}{a}\geqslant\frac{x^2}{e^x}$，令 $g(x)=\frac{x^2}{e^x}(x>0)$，则 $g'(x)=\frac{2x-x^2}{e^x}$，

所以 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 单调递增，在 $(2,+\infty)$ 单调递减，所以 $g(x)_{\max}=g(2)=\frac{4}{e^2}$，

所以 $\frac{1}{a}\geqslant\frac{4}{e^2}\Rightarrow 0<a<\frac{e^2}{4}$. 综上，实数 a 的取值范围为 $[0,\frac{e^2}{4}]$. 故应填 $[0,\frac{e^2}{4}]$.

16. 2 【解析】由点 $M(1,2)$ 在抛物线 $C:y^2=2px$ 上得：$2^2=2p$，即 $p=2$.

所以抛物线 C 的方程为：$y^2=4x$.

设直线 AB 的方程为 $y=kx+1$，$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$.

由直线 MA 与 MB 的倾斜角互补得 $k_{MA}+k_{MB}=0$，即

$\frac{y_1-2}{x_1-2}+\frac{y_2-2}{x_2-2}=\frac{y_1-2}{\frac{y_1^2}{4}-1}+\frac{y_2-2}{\frac{y_2^2}{4}-1}=\frac{4(y_1+y_2+4)}{(y_1+2)(y_2+2)}=0$，所以 $y_1+y_2=-4$.

联立 $\begin{cases}y=kx+1\\y^2=4x\end{cases}$，得 $ky^2-4y+4=0$，所以 $y_1+y_2=\frac{4}{k}$，$y_1y_2=\frac{4}{k}$.

所以 $\frac{4}{k}=-4$，即 $k=-1$，所以 $y_1y_2=-4$.

$$|TA|\cdot|TB|=\sqrt{x_1^2+(y_1-1)^2}\cdot\sqrt{x_2^2+(y_2-1)^2}=\sqrt{x_1^2+(kx_1)^2}\cdot\sqrt{x_2^2+(kx_2)^2}$$

$$=(1+k^2)x_1x_2=(1+k^2)(\frac{y_1y_2}{4})^2=2.$$

17.【解析】(1) 由 $2b\cos C=2a+c$ 及正弦定理得 $2\sin B\cos C=2\sin A+\sin C$，

即 $2\sin B\cos C=2\sin(B+C)+\sin C=2\sin B\cos C+2\cos B\sin C+\sin C$，

所以 $2\cos B\sin C=-\sin C$ ………………………………………………………… 2 分

因为 $C\in(0,\pi)$，所以 $\sin C\neq 0$，所以 $\cos B=-\frac{1}{2}$，

又 $B\in(0,\pi)$，所以 $B=\frac{2\pi}{3}$. ………………………………………………………… 4 分

(2) 因为 $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$，所以 $AM=3$，$MC=6$. 又 $\angle MAB=\angle MBA$，所以 $BM=AM=3$.

在 $\triangle ABC$ 中，由余弦定理得 $b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，即 $a^2+c^2+ac=81$. ① …… 6 分

又 $2\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MC}$，所以 $\overrightarrow{BM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$，两边平方得

$\overrightarrow{BM}^2=\frac{4}{9}\overrightarrow{BA}^2+\frac{1}{9}\overrightarrow{BC}^2+\frac{4}{9}\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}$,

即 $9=\frac{4}{9}c^2+\frac{1}{9}a^2+\frac{4}{9}ac\cos B$,所以 $a^2+4c^2-2ac=81$.② ························ 8 分

②－①得 $3c^2=3ac$,所以 $a=c$,代入①得 $a=c=3\sqrt{3}$,

在△BMC 中,$BM^2+BC^2=3^2+(3\sqrt{3})^2=36=MC^2$,所以△$BMC$ 是以∠MBC 为直角的三角形,所以△BMC 的面积为 $\frac{1}{2}\times3\times3\sqrt{3}=\frac{9\sqrt{3}}{2}$. ·························· 10 分

18.【解析】(1) $2na_n-2S_n=n^2-n$①,当时 $n\geqslant2$ 时,$2(n-1)a_{n-1}-2S_{n-1}=(n-1)^2-(n-1)$②,

①－②得:$2na_n-2(n-1)a_{n-1}-2(S_n-S_{n-1})=n^2-(n-1)^2-n+(n-1)$

即 $2(n-1)a_n-2(n-1)a_{n-1}=2(n-1)$, ·· 4 分

所以 $a_n-a_{n-1}=1$,$n\geqslant2$ 且 $n\in\mathrm{N}^*$,所以$\{a_n\}$是以 1 为公差的等差数列. ········ 5 分

(2)由(1)得,$a_n=n$. ··· 6 分

当 $n=1$ 时,$b_1=T_1=1$;当 $n\geqslant2$ 时,$b_n=T_n-T_{n-1}=2^{n-1}$;又 $b_1=1$ 满足上式,

所以 $b_n=2^{n-1}(n\in\mathrm{N}^*)$. ·· 7 分

所以 $c_n=\frac{n^2}{2^{n-1}}$,记数列$\{c_n\}$的前 n 项和为 R_n.

方法一:(两次错位相减)

$R_n=\frac{1^2}{2^0}+\frac{2^2}{2^1}+\frac{3^2}{2^2}+\cdots+\frac{n^2}{2^{n-1}}$,①

$\frac{1}{2}R_n=\frac{1^2}{2^1}+\frac{2^2}{2^2}+\frac{3^2}{2^3}+\cdots+\frac{n^2}{2^n}$,②

①－②得 $\frac{1}{2}R_n=\frac{1}{2^0}+\frac{3}{2^1}+\frac{5}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}-\frac{n^2}{2^n}$,③ ································ 9 分

则 $\frac{1}{4}R_n=\frac{1}{2^1}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-3}{2^{n-1}}+\frac{2n-1}{2^n}-\frac{n^2}{2^{n+1}}$,④

③－④得 $\frac{1}{4}R_n=1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{n^2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^n}+\frac{n^2}{2^{n+1}}=1+2(1-\frac{1}{2^{n-1}})-\frac{2n-1}{2^n}-\frac{n^2}{2^{n+1}}=3-\frac{n^2+4n+6}{2^{n+1}}$, ··· 11 分

所以 $R_n=12-\frac{n^2+4n+6}{2^{n-1}}$. ·· 12 分

方法二:(裂项)

因为 $c_n=\frac{n^2}{2^{n-1}}=\frac{n^2+2n+3}{2^{n-2}}-\frac{(n+1)^2+2(n+1)+3}{2^{n-1}}$, …………………………… 9 分

所以 $R_n=\frac{1^2+2\times1+3}{2^{-1}}-\frac{2^2+2\times2+3}{2^0}-\frac{2^3+2\times3+3}{2^1}+\cdots+\frac{n^2+2n+3}{2^{n-2}}-\frac{(n+1)^2+2(n+1)+3}{2^{n-1}}=12-\frac{(n+1)^2+2(n+1)+3}{2^{n-1}}=12-\frac{n^2+4n+6}{2^{n-1}}$. ……… 12 分

19.【解析】(1)样本平均数的估计值为$(40\times0.010+50\times0.020+60\times0.030+70\times0.024+80\times0.012+90\times0.004)\times10=62$ ……………………………………………… 2 分

(2)因为学生初试成绩 X 服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$,其中 $\mu=86.9,\sigma^2=13^2$,

则 $\mu+2\sigma=62+2\times13=88$,

所以 $P(X\geqslant88)=P(X\geqslant\mu+2\sigma)=\frac{1}{2}\times(1-0.9545)=0.02275$,

所以估计初试成绩不低于 88 分的人数为 $0.02275\times4000=91$ 人. …………… 5 分

(3)Y 的取值分别为 0,5,10,15,20,25,

则 $P(Y=0)=(1-\frac{3}{4})\times(1-\frac{3}{5})^2=\frac{1}{25}$,

$P(Y=5)=\frac{3}{4}\times(1-\frac{3}{5})^2=\frac{3}{25}$,

$P(Y=10)=(1-\frac{3}{4})\times C_2^1\times\frac{3}{5}\times(1-\frac{3}{5})=\frac{3}{25}$,

$P(Y=15)=\frac{3}{4}\times C_2^1\times\frac{3}{5}\times(1-\frac{3}{5})=\frac{9}{25}$,

$P(Y=20)=(1-\frac{3}{4})\times(\frac{3}{5})^2=\frac{9}{100}$,$P(Y=25)=\frac{3}{4}\times(\frac{3}{5})^2=\frac{27}{100}$, …………… 10 分

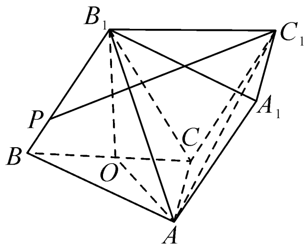
故 Y 的分布列为:

Y	0	5	10	15	20	25
P	$\frac{1}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{3}{25}$	$\frac{9}{25}$	$\frac{9}{100}$	$\frac{27}{100}$

所以数学期望为 $E(Y)=0\times\frac{1}{25}+5\times\frac{3}{25}+10\times\frac{3}{25}+15\times\frac{9}{25}+20\times\frac{9}{100}+25\times\frac{27}{100}=\frac{207}{20}$. …

……………………………………………………………………………… 12 分

20.【解析】(1)如图，取 BC 的中点为 O，



由于$\triangle B_1BC$ 和$\triangle ABC$ 为正三角形，则 $BC\perp AO$，

$BC\perp B_1O$，且 $AO=B_1O=\sqrt{3}$. ………………………… 1 分

$AB_1=\sqrt{6}$，所以 $AO^2+B_1O^2=AB_1^2$，所以 $B_1O\perp AO$

又 $BC\cap AO=O$，所以三棱柱 $ABC—A_1B_1C_1$ 的体积

$V=B_1O\cdot S_{\triangle ABC}=\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2=3$ …………………………………………………… 4 分

在 AOB_1 中，$AO=B_1O=\sqrt{3}$，$AB_1=3$，

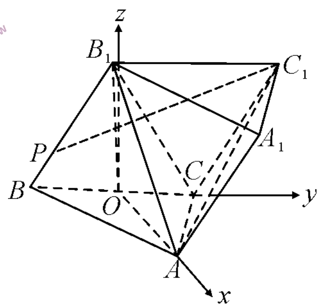
由余弦定理可得 $\cos\angle AOB_1=\frac{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{3})^2-3^2}{2\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=-\frac{1}{2}$，所以$\angle AOB_1=\frac{2\pi}{3}$. ……

…………………………………………………………………………………………… 5 分

(2)由(1)$BC\perp AO$，$BC\perp B_1O$，又 $B_1O\cap AO=O$，所以 $BC\perp$平面 AOB_1.

因为 $BC\subset$平面 ABC，所以平面 $AOB_1\perp$平面 ABC. 所以在平面 AOB_1 内作 $Oz\perp OA$，

则 $Oz\perp$平面 ABC. 以 OC，OB，Oz 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴建立空间直角坐标系.



则 $B_1(-\frac{\sqrt{3}}{2},0,\frac{3}{2})$，$B(0,-1,0)$，$A(\sqrt{3},0,0)$，$C(0,1,0)$，

$C_1(-\frac{\sqrt{3}}{2},2,\frac{3}{2})$，$A_1(\frac{\sqrt{3}}{2},1,\frac{3}{2})$. ………………………………… 7 分

设 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$是平面 ACC_1A_1 的一个法向量，

$\overrightarrow{AC}=(-\sqrt{3},1,0)$，$\overrightarrow{AC_1}=(-\frac{3\sqrt{3}}{2},2,\frac{3}{2})$，

则$\begin{cases}\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0,\\ \boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{AC_1}=0,\end{cases}$即$\begin{cases}-\sqrt{3}x+y=0,\\ -\frac{3\sqrt{3}}{2}x+2y+\frac{3}{2}z=0,\end{cases}$ …………………………………………… 9 分

取 $z=1$ 得 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},-3,1)$.

设$\overrightarrow{BP}=\lambda\overrightarrow{BB_1}(0\leqslant\lambda\leqslant 1)$，则$\overrightarrow{C_1P}=\overrightarrow{C_1B}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{C_1B}+\lambda\overrightarrow{BB_1}$

$=(\frac{\sqrt{3}}{2},-3,-\frac{3}{2})+\lambda(-\frac{\sqrt{3}}{2},1,\frac{3}{2})=(\frac{\sqrt{3}}{2}(1-\lambda),\lambda-3,\frac{3}{2}(\lambda-1))$，

设直线 PC_1 与平面 ACC_1A_1 所成角为 θ，

则 $\sin\theta=|\cos<\overrightarrow{C_1P},\boldsymbol{n}>|=\left|\dfrac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{C_1P}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{C_1P}|}\right|=\dfrac{6}{\sqrt{13}\times\sqrt{4(\lambda^2-3\lambda+3)}}=\dfrac{3}{\sqrt{13}\times\sqrt{\lambda^2-3\lambda+3}}$,

…………………………………………………………………………………… 11 分

令 $f(\lambda)=\dfrac{3}{\sqrt{13}\times\sqrt{\lambda^2-3\lambda+3}}(0\leqslant\lambda\leqslant1)$，则 $f(\lambda)$ 在 $[0,1]$ 单调递增，

所以 $f(\lambda)\in[\dfrac{\sqrt{39}}{13},\dfrac{3\sqrt{13}}{13}]$，

故直线 PC_1 与平面 ACC_1A_1 所成角的正弦值的取值范围为 $[\dfrac{\sqrt{39}}{13},\dfrac{3\sqrt{13}}{13}]$. … 12 分

21.【解析】(1) $A(3,0)$，$F(-2,0)$，设 $l:x=my-2$，$M(x_1,y_1)$，$N(x_2,y_2)$，

联立 $\begin{cases}x=my-2,\\ \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1,\end{cases}$ 得 $(5m^2+9)y^2-20my-25=0$，则 $y_1+y_2=\dfrac{20m}{5m^2+9}$，

$y_1y_2=\dfrac{-25}{5m^2+9}$，…… 2 分直线 $AM:y=\dfrac{y_1}{x_1-3}(x-3)$，令 $x=-\dfrac{9}{2}$ 得 $y=-\dfrac{15y_1}{2(x_1-3)}$，

所以 $P(-\dfrac{9}{2},-\dfrac{15y_1}{2(x_1-3)})$，同理，$Q(-\dfrac{9}{2},-\dfrac{15y_2}{2(x_2-3)})$. ……………………… 4 分

所以 $y_P+y_Q=-\dfrac{15y_1}{2(x_1-3)}-\dfrac{15y_2}{2(x_2-3)}=-\dfrac{15}{2}(\dfrac{y_1}{my_1-5}+\dfrac{y_2}{my_2-5})$

$$=-\frac{15}{2}\cdot\frac{2my_1y_2-5(y_1+y_2)}{m^2y_1y_2-5m(y_1+y_2)+25}=-\frac{15}{2}\cdot\frac{\dfrac{-50m}{5m^2+9}-\dfrac{100m}{5m^2+9}}{\dfrac{-25m^2}{5m^2+9}-\dfrac{100m^2}{5m^2+9}+25}=5m.$$

直线 $RF:y=-m(x+2)$，令 $x=-\dfrac{9}{2}$ 得 $y=\dfrac{5m}{2}$，所以 $R(-\dfrac{9}{2},\dfrac{5}{2}m)$，

则 $y_P+y_Q=2y_R$，点 R 为线段 PQ 的中点. ………………………………………… 6 分

(2) 由 (1) 知，$|MN|=\sqrt{1+m^2}\,|y_1-y_2|=\sqrt{1+m^2}\cdot\sqrt{(\dfrac{20m}{5m^2+9})^2+\dfrac{100}{5m^2+9}}=$ $\dfrac{30(1+m^2)}{5m^2+9}$，

又 $|RF|=\sqrt{(-\dfrac{9}{2}+2)^2+(\dfrac{5m}{2})^2}=\dfrac{5\sqrt{1+m^2}}{2}$，所以 $S_2=\dfrac{1}{2}\cdot|RF|\cdot|MN|=$ $\dfrac{75(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}{2(5m^2+9)}$. ………………………………………………………………… 8 分

而 $S_1+S_3=\frac{1}{2}\cdot|PR|\cdot|x_1+\frac{9}{2}|+\frac{1}{2}\cdot|QR|\cdot|x_2+\frac{9}{2}|=\frac{1}{4}\cdot|PQ|\cdot|x_1+\frac{9}{2}+x_2+\frac{9}{2}|$

$=\frac{1}{4}|-\frac{15y_1}{2(my_1-5)}+\frac{15y_2}{2(my_2-5)}|\cdot|m(y_1+y_2)+5)|$

$=\frac{75}{8}|\frac{y_1-y_2}{m^2y_1y_2-5m(y_1+y_2)+25}|\cdot|m(y_1+y_2)+5)|$

$=\frac{75}{8}|\frac{\frac{30\sqrt{1+m^2}}{5m^2+9}}{\frac{-25m^2}{5m^2+9}-\frac{100m^2}{5m^2+9}+25}|\cdot|\frac{20m^2}{5m^2+9}+5|=\frac{225(1+m^2)^{\frac{3}{2}}}{4(5m^2+9)}$，……………… 10 分

所以 $\frac{3}{2}S_2=S_1+S_3$.

故存在 $\lambda=\frac{3}{2}$ 使得 $\lambda S_2=S_1+S_3$. …………………………………………………… 12 分

22.【解析】(1)当时 $a=1$，$f(x)=\ln x-\frac{x-1}{x+1}$，$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{x^2+1}{x(x+1)^2}$，……… 1 分

则 $f'(x)>0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递增，

故 $f(x)$ 的单调递增区区间为 $(0,+\infty)$，无单调递减区间. ……………………………… 2 分

(2)(i) $g(x)=a(x^2-1)\ln x-(x-1)^2=(x^2-1)(a\ln x-\frac{x-1}{x+1})=(x^2-1)f(x)$，

$g(1)=0$，$f(1)=0$，则 $f(x)$ 除 1 外还有两个零点. ………………………………… 3 分

$f'(x)=\frac{a}{x}-\frac{2}{(x+1)^2}=\frac{ax^2+(2a-2)x+a}{x(x+1)^2}$，令 $h(x)=ax^2+(2a-2)x+a(x>0)$，

当 $a<0$ 时，$h(x)<0$ 在 $(0,+\infty)$ 恒成立，则 $f'(x)<0$，所以 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减，不满足，舍去；

当 $a>0$ 时，要是 $f(x)$ 除 1 外还有两个零点，则 $f(x)$ 不单调，

所以 $h(x)$ 存在两个零点，所以 $\Delta=(2a-2)^2-4a^2>0$，解得 $0<a<\frac{1}{2}$，………… 5 分

当 $0<a<\frac{1}{2}$ 时，设 $h(x)$ 的两个零点为 $m,n(m<n)$，则 $m+n=\frac{2}{a}-2>0$，$mn=1$，

所以 $0<m<1<n$. 当 $x\in(0,m)$ 时，$h(x)>0$，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增；

当 $x\in(m,n)$ 时，$h(x)<0$，$f'(x)<0$，则 $f(x)$ 单调递减；当 $x\in(n,+\infty)$ 时，

$h(x)>0$，$f'(x)>0$，则 $f(x)$ 单调递增；又 $f(1)=0$，所以 $f(m)>0$，$f(n)<0$，

而 $f(e^{-\frac{1}{a}})=-1-\dfrac{e^{-\frac{1}{a}}-1}{e^{-\frac{1}{a}}+1}=-\dfrac{2e^{-\frac{1}{a}}}{e^{-\frac{1}{a}}+1}<0$，且 $e^{-\frac{1}{a}}<1$，

$f(e^{\frac{1}{a}})=1-\dfrac{e^{\frac{1}{a}}-1}{e^{\frac{1}{a}}+1}=\dfrac{2}{e^{\frac{1}{a}}+1}>0$，且 $e^{\frac{1}{a}}>1$，所以存在 $x_1\in(e^{-\frac{1}{a}},m)$，$x_3\in(n,e^{\frac{1}{a}})$，

使得 $f(x_1)=f(x_3)=0$，

即 $g(x)=a(x^2-1)\ln x-(x-1)^2(a\neq0)$ 有 3 个零点 x_1，$x_2=1$，x_3. 综上，实数 a 的取值范围为 $(0,\dfrac{1}{2})$. …………………………………………………………… 7 分

(ii)因为 $f(\dfrac{1}{x})=-a\ln x-\dfrac{\dfrac{1}{x}-1}{\dfrac{1}{x}+1}=-a\ln x-\dfrac{1-x}{1+x}=-a\ln x+\dfrac{x-1}{x+1}=-f(x)$，

所以若 $f(x)=0$，则 $f(\dfrac{1}{x})=0$，所以 $x_1=\dfrac{1}{x_3}$.

当 $x>1$ 时，先证明不等式 $\ln x>\dfrac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$ 恒成立，设 $\varphi(x)=\ln x-\dfrac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$，

则 $\varphi'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{12(x^2+x+1)}{(x^2+4x+1)^2}=\dfrac{(x-1)^4}{x(x^2+4x+1)}>0$，所以函数 $\varphi(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，于是 $\varphi(x)>\varphi(1)=0$，即当 $x>1$ 时，不等式 $\ln x>\dfrac{3(x^2-1)}{x^2+4x+1}$ 恒成立. ……………………………………………………………………… 10 分

由 $f(x_3)=0$，可得 $\dfrac{x_3-1}{x_3+1}=a\ln x_3>\dfrac{3a(x_3^2-1)}{x_3^2+4x_3+1}$，因为 $x_3>1$，

所以 $\dfrac{1}{x_3+1}>\dfrac{3a(x_3+1)}{x_3^2+4x_3+1}$，即 $x_3^2+4x_3+1>3a(x_3+1)^2$，两边同除以 x_3，

得 $x_3+4+\dfrac{1}{x_3}>3a(x_3+2+\dfrac{1}{x_3})\Rightarrow x_1+x_3+4>3a(x_1+x_3+2)$，

所以 $(3a-1)(x_1+x_3+2)<2$. ………………………………………………… 12 分