第 59 届国际数学奥林匹克中国国家队

选拔考试一

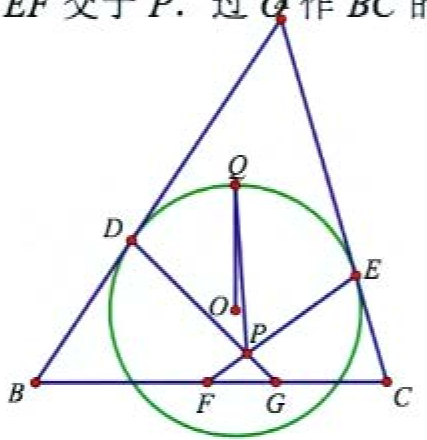
2017 年 12 月 30 日上午 8:00-12:30

1. 已知正实数 p、q 满足 $p+q=1$，$(y_1,y_2,\ \ ,y_{2017})$是一个 2017 元实数组．证明：存在唯一的 2017 元实数组$(x_1,x_2,\ \ ,x_{2017})$，使得 $p\cdot\max\{x_i,x_{i+1}\}+q\cdot\min\{x_i,x_{i+1}\}=y_i$（$i=1,2,\ \ ,2017$）．这里 $x_{2017+k}=x_k$．

2. 如果正整数 n 的正约数个数是 2018 的倍数，就称 n 为有趣数．求所有的正整数 d，使得存在一个无穷项等差数列，公差为 d，每一项都是有趣数．

3. 如图，AB、AC 分别与圆 O 切于点 D 和 E，且 $BD+CE<BC$．在 BC 上取点 F、G，使得 $BF=BD$，$CG=CE$．连结 DG、EF 交于 P．过 O 作 BC 的垂线交弧 DE 于 Q．

证明：$\triangle ABC$ 的内心在直线 PQ 上．



第 59 届国际数学奥林匹克中国国家队

选拔考试二

2017 年 12 月 31 日上午 8:00-12:30

4. 已知 f,g: $\to$ ，且 $f(x)$ 有界．对任意整数 x、y，均有 $f(g(x)+y)=g(f(y)+x)$ 成立．

求证：$g(x)$ 是周期函数．

5. 给定正整数 k，若正整数 n 满足 $C_n^0,C_n^1,\ ,C_n^n$ 中 k 的倍数不少于 $0.99n$ 个，则称 n 是好数．证明：存在正整数 N，使得 $1,2,\ ,N$ 中至少有 $0.99N$ 个好数．

6. 已知 $A_1,A_2,\ ,A_m\subseteq\{1,2,\ ,n\}$，证明：$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}|A_i|\cdot|A_i\ \ A_j|\geq\frac{1}{mn}\left(\sum_{i=1}^{m}|A_i|\right)^3$．

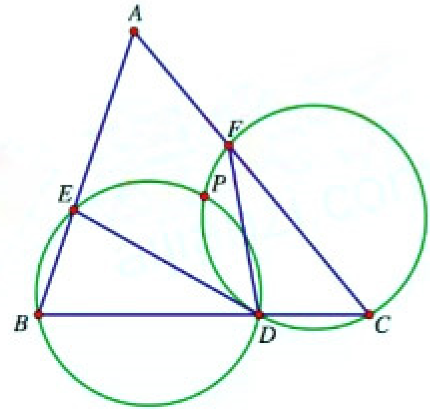
注：$|X|$ 表示集合 X 的元素个数．

第 59 届国际数学奥林匹克中国国家队

选拔考试三

2018 年 1 月 8 日上午 8:00-12:30

1. 给定$\triangle ABC$．D 为 BC 上动点．在 AB 上取点 E，使得 $BE=CD$；在 AC 上取点 F，使得 $CF=BD$．$\triangle BDE$ 的外接圆和$\triangle CDF$ 的外接圆交于另一点 P．求证：P 点在一个定圆上．



2. 将正整数 n 表示为无序的正整数之和，有 $P(n)$ 种方法．求满足 $P(n)+P(n+4)=P(n+2)+P(n+3)$ 的所有正整数 n．

3. 给定正整数 p、q．黑板上写有 n 个正整数，每次操作可以任取两个相同的数，将它们分别加上 p 和 q．要使得操作可以无限进行下去，求 n 的最小可能值．

第 59 届国际数学奥林匹克中国国家队

选拔考试四

2018 年 1 月 9 日上午 8:00-12:30

4. 已知 k、N 为正整数，且存在质数 p，$p^2 \mid k$．求证：存在正实数 a，使得对任意正整数 n，$\left[ak^n\right]$ 都与 N 互质．（$[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数）

5. 给定正整数 n、k，$n \geq 4k$．对任意正实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$，不等式 $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{a_i^2 + a_{i+1}^2 + \cdots + a_{i+k}^2}} \leq \lambda$ 恒成立．

求 λ 的最小值．（规定 $a_{n+m} = a_m$，$m = 1, 2, \cdots$）

6. 已知 a、b、r、M 是整数，$a, r \geq 2$．函数 $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 满足：

①对任意整数 $m, n > M$，$m \neq n$，有 $(m-n) \mid (f(m) - f(n))$；

②对任意整数 $n > M$，有 $f(n) \geq 0$；

③对任意整数 n，$f^{(r)}(n) = an + b$；

证明，a 可以表示为一个正整数的 r 次方幂．（$f^{(r)}(n)$ 表示 $f(n)$ 的 r 次迭代）