

四川省宜宾市四中高 2023 届高三上期末考试

文科数学参考答案:

1. B 2. D 3. C 4. B 5. C 6. C 7. A 8. B 9. B 10. B 11. B 12. A

13. $\frac{13}{2}$ 14. $-\frac{1}{3}$ 15. $-\frac{\pi}{3}$ 16. ①③

17. 解: (1) \because 月工资收入在 $[45, 50)$ (百元) 内的人数为 15

\therefore 月工资收入在 $[45, 50)$ (百元) 内的频率为: $\frac{15}{100} = 0.15$;

由频率分布直方图得: $(0.02 + 0.04 + 2n + 0.01) \times 5 + 0.15 = 1 \quad \therefore n = 0.05$

(2) ①根据题意得到列联表:

	技术工	非技术工	总计
月工资不高于平均数	19	31	50
月工资高于平均数	31	19	50
总计	50	50	100

$$K^2 = \frac{100 \times (19 \times 19 - 31 \times 31)}{50 \times 50 \times 50 \times 50} = 5.76 < 10.828$$

\therefore 不能在犯错误的概率不超过 0.001 的前提下, 认为是不是技术工与月工资是否高于平均数有关.

18. 解: (1) $\because \vec{m} = (\sin A - \sin B, \sin B - \sin C)$, $\vec{n} = (a + b, c)$, $\vec{m} \perp \vec{n}$,

$$\therefore (\sin A - \sin B)(a + b) + (\sin B - \sin C)c = 0.$$

$$\therefore (a - b)(a + b) + (b - c)c = 0, \text{ 即 } b^2 + c^2 - a^2 = bc. \therefore \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{1}{2}.$$

$$\because 0 < A < \pi, \therefore A = \frac{\pi}{3}.$$

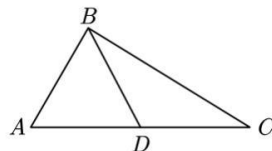
(2) 在 $\triangle ABD$ 中, 由 $BD = \sqrt{3}$, $A = \frac{\pi}{3}$ 和余弦定理, 得
 $BD^2 = 3 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos A = AB^2 + AD^2 - AB \cdot AD.$

$$\because D \text{ 是 } AC \text{ 的中点}, \therefore AD = \frac{b}{2}$$

$$\therefore c^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 - c \times \frac{b}{2} = 3, \text{ 化简得 } 4c^2 + b^2 - 2bc = 12, \text{ 即 } (b + 2c)^2 - 6bc = 12.$$

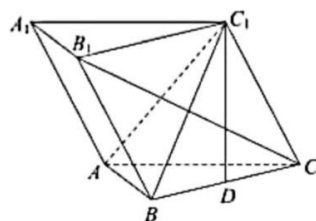
$$\because b + 2c = 4\sqrt{3}, \therefore (4\sqrt{3})^2 - 6bc = 12, \text{ 解得 } bc = 6.$$

$$\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}bc \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}bc}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \therefore \triangle ABC \text{ 的面积为 } \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$



19. (1) 因为平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 ABC ,

平面 $BCC_1B_1 \cap$ 平面 $ABC = BC$ ，又 $AB \perp BC$ ， $AB \subset$ 平面 ABC ，
所以 $AB \perp$ 平面 BCC_1B_1 ，又 $B_1C \subset$ 平面 BCC_1B_1 ，
所以 $AB \perp B_1C$ ，又因为四边形 BCC_1B_1 为菱形，所以 $B_1C \perp BC_1$ ，
而 $AB \cap BC_1 = B$ ，且 $AB, BC_1 \subset$ 平面 ABC_1 ，所以 $B_1C \perp$ 平面 ABC_1 。



(2) 如图所示：过 C_1 作 $C_1D \perp BC$ ，垂足为 D ，则 D 为 BC 中点，
因为平面 $BCC_1B_1 \perp$ 平面 ABC ，平面 $BCC_1B_1 \cap$ 平面 $ABC = BC$ ，
又 $C_1D \perp BC$ ， $C_1D \subset$ 平面 BCC_1B_1 ，所以 $C_1D \perp$ 平面 ABC ，
因为 $BC = 2$ ， $\angle BCC_1 = 60^\circ$ ，所以 $C_1D = \sqrt{3}$ ，
由 $AB = 1$ ， $BC = 2$ ， $C_1D = \sqrt{3}$ ， $\angle ABC_1 = 90^\circ$ ，

$$\text{所以 } V_{\text{四棱锥 } C_1-A_1ABB_1} = V_{\text{三棱锥 } ABC-A_1B_1C_1} - V_{\text{三棱锥 } C_1-ABC} = \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \sqrt{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 2 \times \sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

20. 解：(1) 设椭圆的焦距为 $2c$ ，由题意可得，

$$\begin{cases} e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2a = 4 \\ a^2 = b^2 + c^2 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = \sqrt{3} \end{cases}$$

\therefore 椭圆 C 的标准方程为： $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ ；

(2) 由 (1) 可知 $F_2(\sqrt{3}, 0)$ ，设 $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，则

$$\overline{PA} = (x_1 - 3, y_1), \quad \overline{PB} = (x_2 - 3, y_2),$$

$$\therefore \overline{PA} \cdot \overline{PB} = (x_1 - 3)(x_2 - 3) + y_1 y_2 = x_1 x_2 + y_1 y_2 - 3(x_1 + x_2) + 9,$$

① 当直线 l 与 x 轴垂直时，直线 l 的方程为 $x = \sqrt{3}$ ，得 $x_1 = x_2 = \sqrt{3}$ ，

代入得 $y_1 = \frac{1}{2}$ ， $y_2 = -\frac{1}{2}$ ，或 $y_1 = -\frac{1}{2}$ ， $y_2 = \frac{1}{2}$ ，则 $\overline{PA} \cdot \overline{PB} = \frac{47}{4} - 6\sqrt{3}$ ，

② 当直线 l 不与 x 轴垂直时，设直线的方程为 $y = k(x - \sqrt{3})$ ，

$$\text{联立 } \begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ y = k(x - \sqrt{3}) \end{cases}, \text{ 得 } (1 + 4k^2)x^2 - 8\sqrt{3}k^2x + 12k^2 - 4 = 0, \text{ 由韦达定理得 } x_1 + x_2 = \frac{8\sqrt{3}k^2}{1 + 4k^2}, x_1 x_2 = \frac{12k^2 - 4}{1 + 4k^2},$$

$$\therefore y_1 y_2 = k^2 [x_1 x_2 - \sqrt{3}(x_1 + x_2) + 3] = -\frac{k^2}{1 + 4k^2},$$

$$\therefore \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \frac{12k^2 - 4}{1 + 4k^2} - 3 \times \frac{8\sqrt{3}k^2}{1 + 4k^2} - \frac{k^2}{1 + 4k^2} + 9 = \frac{(47 - 24\sqrt{3})k^2 + 5}{1 + 4k^2}$$

令 $1+4k^2, t \geq 1$, 则 $k^2 = \frac{t-1}{4}$,

$$\therefore \overline{PA} \cdot \overline{PB} = \frac{(47-24\sqrt{3}) \cdot \frac{t-1}{4} + 5}{t} = \left(\frac{47}{4} - 6\sqrt{3}\right) + \frac{24\sqrt{3}-27}{4t}$$

又因函数 $f(t) = \frac{24\sqrt{3}-27}{4t}$ 在 $[1, +\infty)$ 上是减函数, $\therefore \overline{PA} \cdot \overline{PB} \leq \frac{47}{4} - 6\sqrt{3} + \frac{24\sqrt{3}-27}{4} = 5$,

综上: m 的最小值为 5.

21 解: $\because f(-x) = f(x) \therefore f(x)$ 为偶函数, 只需先研究 $x \in [0, \pi]$,

$$f(x) = x \sin x + \cos x, f'(x) = \sin x + x \cos x - \sin x = x \cos x,$$

当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f'(x) \geq 0$, 当 $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, $f'(x) \leq 0$,

所以 $f(x)$ 在 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 单调递增, 在 $x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ 单调递减,

所以根据偶函数图象关于 y 轴对称,

得 $f(x)$ 在 $x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]$ 单调递增, 在 $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ 单调递减,

故 $f(x)$ 单调递减区间为: $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right], \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$; 单调递增区间为: $\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right], \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$(2) f'(x) = x \cos x + ax = x(\cos x + a),$$

① $a \geq 1$ 时, $f'(x) = x(\cos x + a) \geq 0$ 在 $x \in [0, \pi]$ 恒成立,

$\therefore f(x)$ 在 $x \in [0, \pi]$ 单调递增

又 $f(0) = 1$, 所以 $f(x)$ 在 $x \in [-\pi, \pi]$ 上无零点

② $0 < a < 1$ 时, $\exists x_0 \in (0, \pi)$,

使得 $x_0(\cos x_0 + a) = 0$, 即 $\cos x_0 = -a$. 又 $\cos x$ 在 $(0, \pi)$ 单调递减,

所以 $x \in (0, x_0)$, $f'(x) > 0$, $x \in (x_0, \pi)$, $f'(x) < 0$

所以 $x \in (0, x_0)$, $f(x)$ 单调递增, $x \in (x_0, \pi)$, $f(x)$ 单调递减,

$$\text{又 } f(0) = 1, f(\pi) = \frac{1}{2}a\pi^2 - 1$$

(i) $\frac{1}{2}a\pi^2 - 1 > 0$, 即 $\frac{2}{\pi^2} < a < 1$ 时, $f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上无零点,

又 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上无零点,

(ii) $\frac{1}{2}a\pi^2 - 1 \leq 0$, 即 $0 < a \leq \frac{2}{\pi^2}$.

$f(x)$ 在 $[0, \pi]$ 上有 1 个零点,

又 $f(x)$ 为偶函数, 所以 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上有 2 个零点,

综上所述, 当 $0 < a \leq \frac{2}{\pi^2}$ 时, $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上有 2 个零点, 当 $a > \frac{2}{\pi^2}$ 时, $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上无零点.

22. 解: (1) 将方程 $\begin{cases} x = 4\cos\alpha + 2, \\ y = 4\sin\alpha, \end{cases}$ (α 为参数), 消去参数 α 后可得 $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$,

\therefore 曲线 C 的普通方程为 $x^2 + y^2 - 4x - 12 = 0$, 将 $x^2 + y^2 = \rho^2$, $x = \rho\cos\theta$ 代入上式可得 $\rho^2 - 4\rho\cos\theta = 12$,

\therefore 曲线 C 的极坐标方程为 $\rho^2 - 4\rho\cos\theta - 12 = 0$.

(2) 设 A, B 两点的极坐标分别为 $(\rho_1, \frac{\pi}{6}), (\rho_2, \frac{\pi}{6})$, 由 $\begin{cases} \rho^2 - 4\rho\cos\theta = 12, \\ \theta = \frac{\pi}{6}, \end{cases}$ 消去 θ 整理得 $\rho^2 - 2\sqrt{3}\rho - 12 = 0$,

根据题意可得 ρ_1, ρ_2 是方程 $\rho^2 - 2\sqrt{3}\rho - 12 = 0$ 的两根, $\therefore \rho_1 + \rho_2 = 2\sqrt{3}, \rho_1\rho_2 = -12$,

$\therefore |AB| = |\rho_1 - \rho_2| = \sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2 - 4\rho_1\rho_2} = 2\sqrt{15}$.

\therefore 直线 l 的普通方程为 $\sqrt{3}x - 3y = 0$, \therefore 圆 C 的圆心 $(2, 0)$ 到直线 l 的距离为 $d = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2}} = 1$,

又圆 C 的半径为 $r = 4$, $\therefore (S_{\triangle PAB})_{\max} = \frac{1}{2}|AB|(d+r) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{15} \times (1+4) = 5\sqrt{15}$.

23. 解: (1) $\therefore f(x) = \begin{cases} -4x-3, & x \leq -2 \\ 5, & -2 < x \leq -1 \\ 2x+7, & -1 < x \leq 2 \\ 4x+3, & x > 2 \end{cases}$, $\therefore f(x)$ 的最小值为 5, $\therefore f(x) \geq 5$.

(2) 由 (1) 知: $15 - 2f(x)$ 的最大值等于 5,

$\therefore a^2 + \frac{9}{a^2+1} = (a^2+1) + \frac{9}{a^2+1} - 1 \geq 2\sqrt{(a^2+1) \times \frac{9}{a^2+1}} - 1 = 5$,

当 $(a^2+1) = \frac{9}{a^2+1}$, “=” 成立,

即 $a = \pm\sqrt{2}$, \therefore 当 $a = \pm\sqrt{2}$ 时, $a^2 + \frac{9}{a^2+1}$ 取得最小值 5, 当 $a \neq \pm\sqrt{2}$ 时, $a^2 + \frac{9}{a^2+1} > 5$,

又因为对任意实数 x , $15 - 2f(x) < a^2 + \frac{9}{a^2+1}$ 都成立, 所以 $a \neq \pm\sqrt{2}$, $\therefore a$ 的取值范围 $a \neq \pm\sqrt{2}$.

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址：www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



 微信搜一搜

 自主选拔在线

