高三数学试卷参考答案(理科)

1.D　因为 $A=\{x|1<x<4\}$,$\complement_U B=\{x|x<2\}$,所以 $A\cap\complement_U B=\{x|1<x<2\}$.

2.C　因为 $a+\mathrm{i}$ 与 $3+b\mathrm{i}$ 互为共轭复数,所以 $a=3,b=-1$,所以$(a+b\mathrm{i})^2=(3-\mathrm{i})^2=8-6\mathrm{i}$.

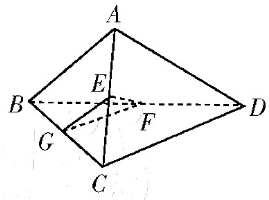
3.A　因为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$,且 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向,所以 $m^2=4$,解得 $m=\pm2$,当 $m=2$ 时,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 反向,当 $m=-2$ 时,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 同向,所以选 A.

4.B　$\frac{y}{x}$表示可行域内的点(x,y)与原点连线所在直线的斜率,画出可行域(图略)知,经过点$(1,3)$与原点的直线斜率最大,且最大值为 3.

5.C　$f(x)=\frac{x}{2\ln|x|}$的定义域为$\{x|x\neq0$ 且 $x\neq\pm1\}$,因为 $f(-x)=-f(x)$,所以 $f(x)$为奇函数,排除 A,D,当 $x\in(0,1)$时,$f(x)<0$,故选 C.

6.D　因为被调查的所有市民中二居室住户共 100 户,所占比例为$\frac{2}{9}$,所以 $n=100\div\frac{2}{9}=450$,四居室住户有 $450\times\frac{1}{3}=150$ 户,三居室住户有 200 户,故 A,B 正确;用分层抽样的方法抽取的二居室住户有 $100\times0.2=20$ 户,故 C 正确;用分层抽样的方法抽取的市民中对三居室满意的有 $200\times0.2\times0.5=20$ 户,故 D 错误.

7.B　如图,取 BC 的中点G,并连接 GF,GE,又因为 E,F 分别为AC,BD 的中点,所以 $GF/\!/CD$,且 $GF=\frac{1}{2}CD$,$GE/\!/AB$,且 $GE=\frac{1}{2}AB$,所以 $GE=\frac{\sqrt{2}}{2}GF$.又因为 $EF\perp AB$,所以 $EF\perp EG$,异面直线 EF 与 CD 所成角为$\angle EFG$,在 $\mathrm{Rt}\triangle EFG$ 中,$\sin\angle EFG=\frac{GE}{GF}=\frac{\sqrt{2}}{2}$,所以$\angle EFG=45^\circ$.



8.A　因为$|MF|=\frac{b^2}{a}$,$|AF|=a+c$,$|MF|=2|AF|$,所以 $c^2-a^2=2ac+2a^2$,又 $c=3$,所以 $a^2+2a-3=0$,解得 $a=1$,则 $2a=2$.

9.C　将函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$的图象上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{2}{3}$,纵坐标不变,得到函数 $y=\sin(3x+\frac{\pi}{3})$的图象,再将图象向右平移$\frac{\pi}{6}$个单位长度,得到 $f(x)=\sin[3(x-\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{3}]=\sin(3x-\frac{\pi}{6})$,其图象的对称轴满足 $3x-\frac{\pi}{6}=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$,即 $x=\frac{k\pi}{3}+\frac{2\pi}{9}(k\in\mathbf{Z})$,只有 C 符合.

10.A　因为 $f(x+2)$为奇函数,所以 $f(-x+2)=-f(x+2)$,可知 $f(x)$的图象关于点$(2,0)$对称,所以 $f(7)=-f(-3)$,因为 $f(-3)=-2^{-3}+1=\frac{7}{8}$,所以 $f(7)=-\frac{7}{8}$.

11.B　由题意知$\{OP_i\}$,$\{OB_i\}(i=1,2,3,\cdots,10)$分别是公差为 4 和 18 的等差数列,所以 $|OP_{10}|=|OP_1|+9\times4=84+9\times4=120$,$|OB_{10}|=|OB_1|+9\times18=78+9\times18=240$,所以 $k_{B_{10}P_{10}}=\frac{120-0}{0+240}=\frac{1}{2}$,$k_{A_{10}P_{10}}=\frac{120-0}{0-240}=-\frac{1}{2}$,即最长拉索所在直线的斜率为$\pm\frac{1}{2}$.

12.D　当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$时,$\tan x>x$,令 $x=\frac{1}{3}$,得 $\sin\frac{1}{3}>\frac{1}{3}\cos\frac{1}{3}$,即 $3\sin\frac{1}{3}>$…

a，设 $f(x)=\cos x+\frac{1}{2}x^2-1(0<x<\frac{\pi}{2})$，则 $f'(x)=x-\sin x(0<x<\frac{\pi}{2})$，当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时，$x>\sin x$，所以 $f'(x)>0$，$f(x)$在$(0,\frac{\pi}{2})$上单调递增，所以 $f(x)>f(0)=0$，即 $\cos x>1-\frac{1}{2}x^2$，令 $x=\frac{1}{3}$，可得 $\cos\frac{1}{3}>\frac{17}{18}$，即 $a>b$，所以 $c>a>b$.

13. -32　二项式$(x-2)^4$ 的展开式中 x 的系数为 $C_4^3(-2)^3=-32$.

14. 2^n；5　因为 $S_n=2^{n+1}-2$，所以 $S_{n-1}=2^n-2(n\geqslant 2)$，两式相减得 $a_n=2^n(n\geqslant 2)$，当 $n=1$ 时，$a_1=2^2-2=2$ 也满足 $a_n=2^n$，所以 $a_n=2^n$. 由 $18<2^k<40$，得 $k=5$.

15. $4\sqrt{3}\pi$　因为正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，设其高为 h，$AC=BC=AB=a$，则 $3a\times h=9$，所以 $h=\frac{3}{a}$. 设$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 r，则 $2r=\frac{a}{\sin\frac{\pi}{3}}$，解得 $r=\frac{\sqrt{3}a}{3}$. 设球 O 的半径为 R，则 $R^2=r^2+\frac{h^2}{4}=\frac{a^2}{3}+\frac{9}{4a^2}\geqslant\sqrt{3}$，当且仅当 $a^2=\frac{3\sqrt{3}}{2}$时，等号成立，所以球 O 的表面积的最小值为 $4\pi\times\sqrt{3}=4\sqrt{3}\pi$.

16. 14　设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，$C(x_3,y_3)$，易知 $p=4$，$F(2,0)$，则$\overrightarrow{FA}=(x_1-2,y_1)$，$\overrightarrow{FB}=(x_2-2,y_2)$，$\overrightarrow{FC}=(x_3-2,y_3)$. 因为$\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{OF}$，所以 $x_1-2+x_2-2+x_3-2=2$，即 $x_1+x_2+x_3=8$. 由抛物线的定义可得$|\overrightarrow{FA}|=x_1+2$，$|\overrightarrow{FB}|=x_2+2$，$|\overrightarrow{FC}|=x_3+2$，所以 $|\overrightarrow{FA}|+|\overrightarrow{FB}|+|\overrightarrow{FC}|=x_1+x_2+x_3+6=14$.

17. 解：(1)因为$\sqrt{3}b\sin C\cos A=c\sin B\sin A$，

所以$\sqrt{3}\sin B\sin C\cos A=\sin C\sin B\sin A$，……………………………… 2 分

因为 $\sin B>0$，$\sin C>0$，所以$\sqrt{3}\cos A=\sin A$，……………………………… 4 分

所以 $\tan A=\sqrt{3}$. ……………………………………………………………… 5 分

又 $A\in(0,\pi)$，所以 $A=\frac{\pi}{3}$. ……………………………………………………… 6 分

(2)因为$\frac{1}{2}\times\sqrt{3}b\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$，所以 $b=2\sqrt{3}$，……………………………… 8 分

所以 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=12+3-2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=9$，……………………………… 10 分

解得 $a=3$. ……………………………………………………………………… 12 分

18. 解：(1)用 A 表示“小明游戏结束时至少通过三关”，

则 $P(A)=(\frac{3}{4})^3\times\frac{1}{4}+(\frac{3}{4})^4=\frac{27}{64}$. ……………………………………… 4 分

(2)X 的所有可能取值为 0，1，2，3，4，用 A_k 表示“小明通过第 k 关”，

则 $P(A_k)=\frac{3}{4}$，$k=1,2,3,4$，且 A_1，A_2，A_3，A_4 独立. ……………………………… 5 分

故 $P(X=0)=P(\overline{A_1})=\frac{1}{4}$，…………………………………………………… 6 分

$P(X=1)=P(A_1\overline{A_2})=\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$，……………………………………… 7 分

$P(X=2)=P(A_1A_2\overline{A_3})=(\frac{3}{4})^2\times\frac{1}{4}=\frac{9}{64}$，………………………………… 8 分

$P(X=3)=P(A_1A_2A_3\overline{A_4})=(\frac{3}{4})^3\times\frac{1}{4}=\frac{27}{256}$，…………………………

$P(X=4)=P(A_1A_2A_3A_4)=(\frac{3}{4})^4=\frac{81}{256}$, …………………………………………………… 10 分

X 的分布列为

X	0	1	2	3	4
P	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{9}{64}$	$\frac{27}{256}$	$\frac{81}{256}$

……………………………………………………………………………………………… 11 分

所以 $E(X)=0\times\frac{1}{4}+1\times\frac{3}{16}+2\times\frac{9}{64}+3\times\frac{27}{256}+4\times\frac{81}{256}=\frac{525}{256}$. ……………………… 12 分

19. (1)证明:取 A_1B_1 的中点 F,连接 EF,DF.

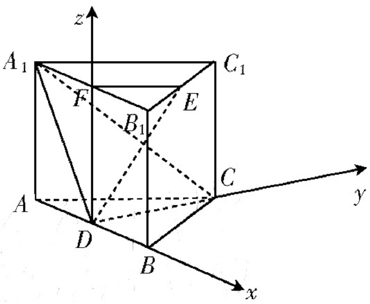
因为 EF 为 $\triangle A_1B_1C_1$ 的中位线,所以 $EF/\!/A_1C_1$,又 $EF\not\subset$平面 ACC_1A_1,$A_1C_1\subset$平面 ACC_1A_1,所以 $EF/\!/$平面 ACC_1A_1. ……………………………………………………………… 2 分

因为 D,F 分别为棱 AB,A_1B_1 的中点,所以 $DF/\!/AA_1$,又 $DF\not\subset$平面ACC_1A_1,$AA_1\subset$平面 ACC_1A_1,所以 $DF/\!/$平面 ACC_1A_1. ……………………………………………………………… 4 分

又 $EF\cap DF=F$,所以平面 $DEF/\!/$平面 ACC_1A_1. ……………………………………………… 5 分

因为 $DE\subset$平面 DEF,所以 $DE/\!/$平面 ACC_1A_1. ……………………………………………… 6 分

(2)解:以 D 为坐标原点,$\overrightarrow{DB},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DF}$的方向为 x 轴、y 轴、z 轴的正方向,建立如图所示的空间直角坐标系. 设 $AA_1=h$,则三棱锥 $A-A_1DC$ 的体积 $V_{A-A_1DC}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACD}\cdot A_1A=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times1\times\sqrt{3}\times h=\frac{\sqrt{3}}{3}$,解得 $h=2$, ……………………………………………… 7 分



则 $A_1(-1,0,2),C(0,\sqrt{3},0),A(-1,0,0),D(0,0,0),\overrightarrow{AC}=(1,\sqrt{3},0),\overrightarrow{AA_1}=(0,0,2)$. ……………………………………………………………… 8 分

设平面 A_1CA 的法向量为 $\boldsymbol{n}=(x,y,z)$,

由$\begin{cases}\overrightarrow{AC}\cdot\boldsymbol{n}=0,\\ \overrightarrow{AA_1}\cdot\boldsymbol{n}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}x+\sqrt{3}y=0,\\ 2z=0,\end{cases}$令 $y=1$,则 $\boldsymbol{n}=(-\sqrt{3},1,0)$. ……………………………… 9 分

设平面 DA_1C 的法向量为 $\boldsymbol{m}=(a,b,c)$,$\overrightarrow{DC}=(0,\sqrt{3},0)$,$\overrightarrow{DA_1}=(-1,0,2)$,

由$\begin{cases}\overrightarrow{DC}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{DA_1}\cdot\boldsymbol{m}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}\sqrt{3}b=0,\\ -a+2c=0,\end{cases}$取 $c=1$,则 $\boldsymbol{m}=(2,0,1)$. ……………………………… 10 分

所以 $\cos\langle\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}\rangle=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}}{|\boldsymbol{n}||\boldsymbol{m}|}=\frac{-2\sqrt{3}+0+0}{\sqrt{5}\times2}=-\frac{\sqrt{15}}{5}$, ……………………………………… 11 分

由图可知二面角 $D-A_1C-A$ 为锐角,所以二面角 $D-A_1C-A$ 的余弦值为$\frac{\sqrt{15}}{5}$. … 12 分

20. 解:(1)设椭圆 E 的半焦距为 c,则 $F_2(c,0),Q(a,0)$,因为$|F_2Q|=1$,

所以 $a-c=1$. ……………………………………………………………………………… 1 分

又因为椭圆 E 的离心率为$\frac{1}{2}$,所以$\frac{c}{a}=\frac{1}{2}$,

联立方程组$\begin{cases}a-c=1,\\ \frac{c}{a}=\frac{1}{2},\end{cases}$解得$\begin{cases}a=2,\\ c=1,\end{cases}$ ……………………………………………………… 2 分

所以 $b^2=4-1=3$, ……………………………………………………

椭圆 E 的方程为$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$. …………………………………………………………… 5 分

(2)假设存在点 $P(t,0)$,使得$\overrightarrow{PF_1}=\lambda(\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|}+\frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|})$,则 PF_1 是$\angle APB$ 的平分线,

所以 $k_{PA}+k_{PB}=0$. 显然当 $k_{AB}=0$ 时一定成立. ……………………………………………… 6 分

当 $k_{AB}\neq 0$ 时,设 AB 的方程为 $x=my-1$,与椭圆 E 的方程$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 联立消去 x,得$(3m^2+4)y^2-6my-9=0$. …………………………………………………………………………… 7 分

设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,则 $y_1+y_2=\frac{6m}{3m^2+4}$,$y_1y_2=-\frac{9}{3m^2+4}$. ……………………………… 8 分

因为 $k_{PA}+k_{PB}=\frac{y_1}{x_1-t}+\frac{y_2}{x_2-t}=0$,所以 $y_1(x_2-t)+y_2(x_1-t)=0$, …………………… 9 分

即 $y_1(my_2-1-t)+y_2(my_1-1-t)=0$,所以 $2my_1y_2-(1+t)(y_1+y_2)=0$,

所以$-2m\times\frac{9}{3m^2+4}-\frac{6m(1+t)}{3m^2+4}=0$, ………………………………………………… 10 分

即$-18m-6(1+t)m=0$,即 $m(4+t)=0$,所以 $t=-4$ 对一切实数 m 都成立. ……… 11 分

故存在点 $P(-4,0)$,使得$\overrightarrow{PF_1}=\lambda(\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|}+\frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|})$成立. ……………………………… 12 分

21. 解:(1)因为 $f(x)=\frac{2ae^{2x}}{x}$,所以 $f'(x)=\frac{4ae^{2x}x-2ae^{2x}}{x^2}=\frac{2ae^{2x}(2x-1)}{x^2}$. ……………… 1 分

当 $a>0$ 时,由 $f'(x)>0$,得 $x>\frac{1}{2}$,由 $f'(x)<0$,得 $x<\frac{1}{2}$,且 $x\neq 0$,故 $f(x)$的单调递增区间为$(\frac{1}{2},+\infty)$,单调递减区间为$(-\infty,0)$,$(0,\frac{1}{2})$; …………………………………… 3 分

当 $a<0$ 时,由 $f'(x)>0$,得 $x<\frac{1}{2}$,且 $x\neq 0$,由 $f'(x)<0$,得 $x>\frac{1}{2}$,故 $f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,0)$,$(0,\frac{1}{2})$,单调递减区间为$(\frac{1}{2},+\infty)$. …………………………………… 5 分

(2)易知 $x>0$,$a>0$.

由 $\ln x-xf(x)\leqslant\ln a$,可得 $2ae^{2x}\geqslant\ln x-\ln a=\ln\frac{x}{a}$, …………………………………… 6 分

所以 $2xe^{2x}\geqslant\frac{x}{a}\ln\frac{x}{a}$恒成立,即 $2xe^{2x}\geqslant e^{\ln\frac{x}{a}}\ln\frac{x}{a}$恒成立. …………………………… 7 分

设 $u(x)=xe^x$,则 $u'(x)=(x+1)e^x$,
当 $x<-1$ 时,$u'(x)<0$,当 $x>-1$ 时,$u'(x)>0$,
所以 $u(x)$在$(-\infty,-1)$上单调递减,在$(-1,+\infty)$上单调递增.
因为当 $x<0$ 时,$u(x)<0$,当 $x>0$ 时,$u(x)>0$,

所以 $2xe^{2x}\geqslant e^{\ln\frac{x}{a}}\ln\frac{x}{a}$恒成立等价于 $2x\geqslant\ln\frac{x}{a}$恒成立,

即 $a\geqslant\frac{x}{e^{2x}}$对 $x\in(0,+\infty)$恒成立. ……………………………………………………… 9 分

设 $v(x)=\frac{x}{e^{2x}}$,$x>0$,则 $v'(x)=\frac{1-2x}{e^{2x}}$.

当 $x\in(0,\frac{1}{2})$时,$v'(x)>0$;当 $x\in(\frac{1}{2},+\infty)$时,$v'(x)<0$,

所以 $v(x)$在$(0,\frac{1}{2})$上单调递增,在$(\frac{1}{2},+\infty)$上单调递减, ……………………

所以 $v(x)_{\max}=v(\frac{1}{2})=\frac{1}{2e}$，所以 $a\geqslant\frac{1}{2e}$，即 a 的取值范围是 $[\frac{1}{2e},+\infty)$. ……………… 12 分

22. 解：(1)将直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{5}}{5}t,\\ y=2+\frac{2\sqrt{5}}{5}t\end{cases}$ (t 为参数)化为普通方程，得 $y=2x+2$，…… 2 分

因为 $\rho=4\sin\theta-2\cos\theta$，所以 $\rho^2=4\rho\sin\theta-2\rho\cos\theta$，所以 $x^2+y^2+2x-4y=0$，即曲线 C 的直角坐标方程为 $(x+1)^2+(y-2)^2=5$. ………………………………………………………… 4 分

(2)把直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{5}}{5}t,\\ y=2+\frac{2\sqrt{5}}{5}t\end{cases}$ 代入曲线 C 的方程 $(x+1)^2+(y-2)^2=5$，得 $(\frac{\sqrt{5}}{5}t+1)^2+(\frac{2\sqrt{5}}{5}t)^2=5$，化简得 $t^2+\frac{2\sqrt{5}}{5}t-4=0$. ……………………………………………… 5 分

设 A,B 对应的参数分别为 t_1,t_2，则 $t_1+t_2=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$，$t_1t_2=-4$，…………………………………… 6 分

所以 $|MA||MB|=|t_1t_2|=4$，…………………………………………………………………………… 7 分

$|MA|^2+|MB|^2=t_1^2+t_2^2=(t_1+t_2)^2-2t_1t_2=\frac{44}{5}$， ……………………………………………… 9 分

可得 $\frac{|MA||MB|}{|MA|^2+|MB|^2}=\frac{5}{11}$. ………………………………………………………………………… 10 分

23. 解：(1)显然 $a\neq 0$. ……………………………………………………………………………………… 1 分

当 $a>0$ 时，$|ax-1|\leqslant 1$ 可化为 $0\leqslant ax\leqslant 2$，解得 $0\leqslant x\leqslant\frac{2}{a}$，与 $f(x)\leqslant 1$ 的解集为 $[-6,0]$ 不符. ……………………………………………………………………………………………… 2 分

当 $a<0$ 时，$|ax-1|\leqslant 1$ 可化为 $0\leqslant ax\leqslant 2$，解得 $\frac{2}{a}\leqslant x\leqslant 0$， ………………………………… 4 分

因为 $f(x)\leqslant 1$ 的解集为 $[-6,0]$，所以 $\frac{2}{a}=-6$，解得 $a=-\frac{1}{3}$. ……………………………… 5 分

(2)当 $a=3$ 时，$f(x)=|3x-1|$，

$f(2x+1)-f(x-1)\leqslant 9-2m$ 等价于 $|6x+2|-|3x-4|\leqslant 9-2m$，………………………… 6 分

设 $g(x)=|6x+2|-|3x-4|$，则 $g(x)=\begin{cases}-3x-6,x\leqslant-\frac{1}{3},\\ 9x-2,-\frac{1}{3}<x<\frac{4}{3},\\ 3x+6,x\geqslant\frac{4}{3}.\end{cases}$ ………………………… 8 分

因为存在 $x\in\mathbf{R}$，使得不等式 $f(2x+1)-f(x-1)\leqslant 9-2m$ 成立，

所以 $g(x)_{\min}\leqslant 9-2m$. ………………………………………………………………………………… 9 分

因为 $g(x)_{\min}=g(-\frac{1}{3})=-5$，所以 $-5\leqslant 9-2m$，

解得 $m\leqslant 7$，即实数 m 的取值范围是 $(-\infty,7]$. …………………………………………………… 10 分