内江市高中2023届第三次模拟考试题

数学(理科)参考答案及评分意见

一、选择题(本大题共12小题,每小题5分,共60分.)

1.B 2.A 3.D 4.C 5.A 6.B 7.D 8.C 9.C 10.B 11.D 12.A

二、填空题(本大题共4小题,每小题5分,满分20分.)

13. $-\frac{8}{3}$ 14. 5 15. $\frac{41}{72}$ 16. $\frac{7}{13}$

三、解答题(共70分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤,第17~21题为必考题,每个试题考生都必须作答,第22、23题为选考题,考生根据要求作答.)

17. 解:(1)当 $n=1$ 时,由 $S_{n+1}=2S_n+2$ 得:$S_2=2S_1+2$,即 $a_1+a_2=2a_1+2$,

又 $a_1=2$,∴ $a_2=4$; ………………………………………………………… 1分

当 $n\geq 2$ 时,$a_{n+1}=S_{n+1}-S_n=2S_n+2-2S_{n-1}-2=2a_n$, ………………… 3分

又 $a_1=2$,$a_2=4$ 满足 $a_2=2a_1$,即当 $n=1$ 时,$a_{n+1}=2a_n$ 成立, ………………… 4分

∴ 数列$\{a_n\}$是以2为首项,2为公比的等比数列,∴ $a_n=2^n(n\in N^*)$ ……………… 6分

(2)由(1)得:$b_n=\frac{n\cdot 2^n}{(n+1)(n+2)}=\frac{2^{n-1}}{n+2}-\frac{2^n}{n+1}$, …………………………………… 9分

$\therefore T_n=\frac{2^2}{3}-\frac{2^1}{2}+\frac{2^3}{4}-\frac{2^2}{3}+\frac{2^4}{5}-\frac{2^3}{4}+\cdots+\frac{2^n}{n+1}-\frac{2^{n-1}}{n}+\frac{2^{n+1}}{n+2}-\frac{2^n}{n+1}=\frac{2^{n-1}}{n+2}-1$ …… 12分

18. 解:(1)甲组数据的平均数为 $\frac{10+10+14+18+22+25+27+30+41+43}{10}=24$. ……… 1分

乙组数据的平均数为 $\frac{10+18+20+22+23+31+32+31+30+43}{10}=26$. ……… 2分

易知 $m=5$,$n=5$,所以 $m=n$; ……………………………………………… 4分

(2)X 的可能取值为0,1,2, ………………………………………………… 5分

$P(X=0)=\frac{C_5^0C_5^2}{C_{10}^2}=\frac{2}{9}$,$P(X=1)=\frac{C_5^1C_5^1}{C_{10}^2}=\frac{5}{9}$,$P(X=2)=\frac{C_5^2C_5^0}{C_{10}^2}=\frac{2}{9}$, ………………… 8分

X 的分布列为:

X	0	1	2
P	$\frac{2}{9}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{2}{9}$

$\therefore E(X)=0\times\frac{2}{9}+1\times\frac{5}{9}+2\times\frac{2}{9}=1$ ……………………… 10分

(3)当 $a=b=0$ 时,s^2 达到最小值. ………………………………………… 12分

19. 解:(1)证明:∵ $CD\perp AD$,$CD\perp BD$,$AD\cap BD=D$,AD、$BD\subset$平面ABD,

∴ $CD\perp$平面ABD,∵ $AB\subset$平面ABD,∴ $CD\perp AB$ ……………………… 2分

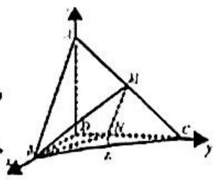
又∵ M,E 分别为 AC,BC 的中点,∴ $ME\parallel AB$,∴ $CD\perp ME$ ……………… 4分

(2)选①,在图1所示的△ABC中,由 $tan2B=-\frac{4}{3}=\frac{2tanB}{1-tan^2B}$, ……………… 2分

解得 $tanB=2$ 或 $tanB=-\frac{1}{2}$(舍去) …… 4分

设 $AD=CD=x$,在 $Rt\triangle ABD$ 中,$tanB=\frac{AD}{BD}=\frac{x}{3-x}=2$,解得 $x=2$,∴ $BD=1$ ……… 6分

以点 D 为原点，DB,DC,DA 分别为 x,y,z 轴建立如图所示的坐标系 $D-xyz$，



$D(0,0,0)$，$B(1,0,0)$，$C(0,2,0)$，$A(0,0,2)$，$M(0,1,1)$，$E\left(\frac{1}{2},1,0\right)$，则$\overrightarrow{BM}=(-1,1,1)$. …………………………………………………………………… 7 分

设 $N(0,a,0)$，则$\overrightarrow{EN}=\left(-\frac{1}{2},a-1,0\right)$

$\because EN\perp BM$，$\therefore \overrightarrow{EN}\cdot\overrightarrow{BM}=0$，即$\left(-\frac{1}{2},a-1,0\right)\cdot(-1,1,1)=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$，

$\therefore$ 当 $DN=\frac{1}{2}$（即 N 是 CD 的靠近 D 的一个四等分点）时，$EN\perp BM$ ………………… 8 分

设平面 BMN 的一个法向量为 $n=(x,y,z)$，$\overrightarrow{BN}=\left(-1,\frac{1}{2},0\right)$，由$\begin{cases}n\cdot\overrightarrow{BN}=0,\\ n\cdot\overrightarrow{BM}=0,\end{cases}$得$\begin{cases}-x+\frac{1}{2}y=0,\\ -x+y+z=0,\end{cases}$

令 $x=1$，则$n=(1,2,-1)$，取平面 CBN 的一个法向量$\overrightarrow{m}=(0,0,1)$，…………………… 10 分

则$|\cos\langle m,n\rangle|=\left|\frac{\overrightarrow{m}\cdot\overrightarrow{n}}{|\overrightarrow{m}||\overrightarrow{n}|}\right|=\frac{|(0,0,1)\cdot(1,2,-1)|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}}=\frac{\sqrt{6}}{6}$，

$\therefore$ 平面 BMN 与平面 CBN 的夹角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{6}$ …………………………………………………… 12 分

选②，在图 1 所示的$\triangle ABC$ 中，设$\overrightarrow{BD}=\lambda\overrightarrow{BC}$，

则$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\lambda(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=(1-\lambda)\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}$，…………………………… 4 分

又$\because\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，由平面向量基本定理知 $\lambda=\frac{1}{3}$，即 $BD=1$ …………………………… 6 分

（以下步骤同上）

选③，在图 1 所示的$\triangle ABC$ 中，设 $BD=x(0<x<3)$，则 $CD=3-x$，

$\therefore AD=CD=3-x$.

折起后 $AD\perp DC$，$AD\perp BD$，且 $BD\cap DC=D$，BD、$DC\subset$平面 BCD，

$\therefore AD\perp$平面 BCD， ………………………………………………………………………… 2 分

又$\angle BDC=90°$，$\therefore S_{\triangle BCD}=\frac{1}{2}x(3-x)$，

$V_{A-BCD}=\frac{1}{3}AD\cdot S_{\triangle BCD}=\frac{1}{3}(3-x)\cdot\frac{1}{2}x(3-x)=\frac{1}{6}(x^3-6x^2+9x)$，$x\in(0,3)$，…… 4 分

令$f(x)=\frac{1}{6}(x^3-6x^2+9x)$，$f'(x)=\frac{1}{2}(x-1)(x-3)$，

当$0<x<1$ 时，$f'(x)>0$；当$1<x<3$ 时，$f'(x)<0$，

$\therefore$ 当 $x=BD=1$ 时，三棱锥 $A-BCD$ 的体积最大 ………………………………………… 6 分

（以下步骤同上）

20. 解：(1) 设 $F(x)=f(x)-g(x)=x^2-2e\ln x(x>0)$，………………………………… 1 分

$\therefore F'(x)=2x-\frac{2e}{x}=\frac{2(x-\sqrt{e})(x+\sqrt{e})}{x}$，令 $F'(x)=0$，得 $x=\sqrt{e}$，………………………… 2 分

当 $0<x<\sqrt{e}$ 时，$F'(x)<0$，$x>\sqrt{e}$ 时，$F'(x)>0$，

故当 $x=\sqrt{e}$ 时，$F(x)$ 取到最小值，最小值是 0， …………………………………………… 4 分

从而函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象在 $x=\sqrt{e}$ 处有公共点，其坐标为 $(\sqrt{e},e)$ ………………………… 5 分

(2) 由(1)可知，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的图象在 $x=\sqrt{e}$ 处有公共点，

如果存在 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的隔离直线，那么该直线过这个公共点，……………………………… 6 分

设隔离直线方程为 $y-e=k(x-\sqrt{e})$，即 $y=kx-k\sqrt{e}+e$，

由 $f(x)\geq kx-k\sqrt{e}+e(x\in R)$，可得 $x^2-kx+k\sqrt{e}-e\geq 0$ 在 $x\in R$ 上恒成立，

则 $\Delta=k^2-4k\sqrt{e}+4e=(k-2\sqrt{e})^2\leq 0$，只有 $k=2\sqrt{e}$， …………………………………… 8 分

此时直线方程为：$y=2\sqrt{e}x-e$ ………………………………………………………………… 9 分

下面证明 $g(x)\leq 2\sqrt{e}x-e$ 恒成立，

令 $G(x)=2\sqrt{e}x-e-g(x)=2\sqrt{e}x-e-2e\ln x$，

$G'(x)=2\sqrt{e}-\frac{2e}{x}=\frac{2\sqrt{e}x-2e}{x}=\frac{2\sqrt{e}(x-\sqrt{e})}{x}$，当 $x=\sqrt{e}$ 时，$G'(x)=0$，

当 $0<x<\sqrt{e}$ 时 $G'(x)<0$，函数单调递减；$x>\sqrt{e}$ 时，$G'(x)>0$，函数单调递增，

则当 $x=\sqrt{e}$ 时，$G'(x)$ 取到最小值是 0，……………………………………………………… 11 分

所以 $G(x)=2\sqrt{e}x-e-g(x)\geq 0$，则 $g(x)\leq 2\sqrt{e}x-e$ 当 $x>0$ 时恒成立.

$\therefore$ 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 存在唯一的隔离直线 $y=2\sqrt{e}x-e$ …………………………………… 12 分

21. 解：(1) 设曲线 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$，则 $2a=|AF_1|+|AF_2|=\frac{7}{2}+\frac{5}{2}=6$，

得 $a=3$，………………………………………………………………………………………… 1 分

设 $A(x,y)$、$F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$，曲线 C_2 的方程为 $y^2=4cx$，其中 $c>0$，

则 $(x+c)^2+y^2=\left(\frac{7}{2}\right)^2$，$(x-c)^2+y^2=\left(\frac{5}{2}\right)$

两式相减得 $xc=\frac{3}{2}$，…………………………………………………………………………… 2 分

由抛物线定义可知 $|AF_2|=x+c=\frac{5}{2}$， ………………………………………………………… 3 分

因为 $\angle AF_2F_1$ 为钝角，则 $x>c$，解得 $\begin{cases}c=1\\x=\frac{3}{2}\end{cases}$， ……………………………………… 4 分

所以，曲线 C_1 的方程为 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1\left(x\leq\frac{3}{2}\right)$，……………………………………………… 5 分

曲线 C_2 的方程为 $y^2=4x\left(x\leq\frac{3}{2}\right)$ ……………………………………………………… 6 分

(2) 设 $B(x_1,y_1)$、$E(x_2,y_2)$、$G(x_3,y_3)$、$D(x_4,y_4)$，设直线 BE 的方程为 $x=my+1$，其中 $m\neq 0$，联立 $\begin{cases}x=my+1\\8x^2+9y^2=72\end{cases}$ 可得 $(8m^2+9)y^2+16my-64=0$，

$y_1+y_2=-\frac{16m}{8m^2+9}$，$y_1y_2=-\frac{64}{8m^2+9}$， ………………………………………………… 8 分

联立$\begin{cases}x=my+1\\ y^2=4x\end{cases}$可得$y^2-4my-4=0$，$y_3+y_4=4m$，$y_3y_4=-4$ ………………………… 10分

所以，$\dfrac{|BE|\cdot|GF_2|}{|CD|\cdot|HF_2|}=\dfrac{\sqrt{1+m^2}\cdot|y_1-y_2|\cdot\sqrt{1+m^2}\cdot\left|\dfrac{y_3+y_4}{2}\right|}{\sqrt{1+m^2}\cdot|y_3-y_4|\cdot\sqrt{1+m^2}\cdot\left|\dfrac{y_1+y_2}{2}\right|}=\sqrt{\dfrac{(y_1-y_2)^2\cdot(y_3+y_4)^2}{(y_1+y_2)^2\cdot(y_3-y_4)^2}}$

$=\sqrt{\dfrac{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}{(y_1+y_2)^2}\cdot\dfrac{(y_3+y_4)^2}{(y_3+y_4)^2-4y_3y_4}}=\sqrt{\dfrac{\left(-\dfrac{16m}{8m^2+9}\right)^2+\dfrac{256}{8m^2+9}}{\left(-\dfrac{16m}{8m^2+9}\right)^2}\cdot\dfrac{16m^2}{16m^2+16}}=3$ ……… 12分

22. 解：(1)由$\rho=4cos\alpha$得$\rho^2=4\rho cos\alpha$，将$\begin{cases}\rho^2=x^2+y^2\\ \rho cos\alpha=x\end{cases}$代入整理得，

曲线C_1的普通方程为$(x-2)^2+y^2=4$， …………………………………… 2分

设曲线C_1上的点为(x',y')，变换后的点为(x,y)，由题可知坐标变换为$\begin{cases}x=x'-2\\ y=\dfrac{1}{2}y'\end{cases}$，

即$\begin{cases}x'=x+2\\ y'=2y\end{cases}$，代入曲线$C_1$的普通方程，整理得曲线$C_2$的普通方程$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$， …… 4分

∴ 曲线C_2的参数方程为$\begin{cases}x=2cos\theta\\ y=sin\theta\end{cases}$（$\theta$为参数）. ……………… ……………… 5分

(2)设四边形$MNPQ$的周长为l，设点$M(2cos\theta,sin\theta)$ $(0<\theta<\dfrac{\pi}{2})$， ………………… 6分

$l=8cos\theta+4sin\theta=4\sqrt{5}\left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}cos\theta+\dfrac{1}{\sqrt{5}}sin\theta\right)=4\sqrt{5}sin(\theta+\varphi)$，且$cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$sin\varphi=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ …… 7分

$\because 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\therefore \varphi<\theta<\Phi<\dfrac{\pi}{2}+\varphi$，$\therefore sin(\theta+\varphi)\leqslant 1$，

$\therefore l_{max}=4\sqrt{5}$. 且当$\theta+\varphi=\dfrac{\pi}{2}$时，$l$取最大值，此时$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\varphi$， ………………………… 8分

所以，$2cos\theta=2sin\varphi=\dfrac{4}{\sqrt{5}}$，$sin\theta=cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，此时$M\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5},\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$ …… …… 10分

23 解：当$a=1$时，$f(x)=|2x-4|+|x^2+1|$

当$x\geqslant 2$时，$f(x)=x^2+2x-3\geqslant f(2)=5$， ………………………………………………… 2分

当$x<2$时，$f(x)=x^2-2x+5\geqslant f(1)=4$，

所以$f(x)\geqslant 4$. …………………………………………………………………………… 4分

(2)当$x\in[1,2]$时，$f(x)=4-2x+|x^2+a|$，

由$f(x)\leqslant 4$，得$-x^2-2x\leqslant a\leqslant -x^2+2x$ ………………………………………… 6分

设$h(x)=-x^2-2x$，$g(x)=-x^2+2x$，

对任意$x\in[1,2]$，$f(x)\leqslant 4$恒成立，所以$h_{max}(x)\leqslant a\leqslant g_{min}(x)$， ………………………… 8分

因为在区间$[1,2]$上，$h_{max}(x)=h(1)=-3$，$g_{min}(x)=g(2)=0$，

所以$-3\leqslant a\leqslant 0$. 即实数a的取值范围为$[-3,0]$ ………………………… 10分