2021—2022学年度第一学期第一学段模块检测

高三数学试题

2021.11

本试卷共页，22题．全卷满分150分．考试用时120分钟．

注意事项：

1．答卷前，考生务必将自己的姓名、考生号等填写在答题卡和试卷指定位置上，并将条形码粘贴在答题卡指定位置上。

2．回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3．考试结束后，请将答题卡上交。

一、单项选择题：本大题共8小题．每小题5分，共40分．在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的．

1．设集合 $M=\{y\mid y=\sqrt{4-2^x}\}$，$N=\{x\mid y=\ln(1-x)\}$，则 $M\cap(\complement_{R}N)=$

A．$[1,2]$　　B．$[1,2)$　　C．$(-\infty,1)$　　D．$(1,2]$

2．已知 $a<b,a\neq 0,b\neq 0,c\in R$，下列不等关系正确的是

A．$a^2<b^2$　　B．$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$　　C．$a-c<b-c$　　D．$ac<bc$

3．方程 $2^x+3x-4=0$ 的实数根所在的区间为

A．$(\dfrac{1}{2},1)$　　B．$(-1,0)$　　C．$(0,\dfrac{1}{2})$　　D．$(1,\dfrac{4}{3})$

4．已知 $\vec{a}=(2,-4),\vec{b}=(m,1)$，则“$m<2$”是“$\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为钝角”的

A．充要条件　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　　D．既不充分也不必要条件

5．已知函数 $f(x)=\begin{cases}\ln(-x),x<0\\ e^{-x},x\geq 0\end{cases}$，若关于 x 的方程 $m-f(x)=0$ 有两个不同的实数根，则实数 m 的取值范围为

A．$(0,+\infty)$　　B．$(-\infty,0]\cup(1,+\infty)$　　C．$(-\infty,0]$　　D．$(0,1]$

6．已知l,m是空间中两条不同的直线，α,β是空间中两个不同的平面，下列说法正确的是

A．若$l\perp\alpha$，$m/\!/l$，$m\subset\beta$，则$\alpha\perp\beta$　　B．若$\alpha/\!/\beta$，$l/\!/\alpha$，则$l/\!/\beta$

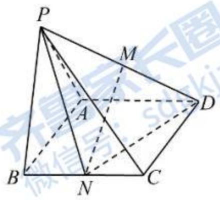
C．若$l\perp m$，$l\perp\alpha$，$\alpha/\!/\beta$，则$m/\!/\beta$　　D．若$\alpha\perp\beta$，$l/\!/\alpha$，则$l\perp\beta$

7．已知角α的顶点在坐标原点，始边与x轴非负半轴重合，终边上有一点

$M(\tan\frac{3\pi}{4},2\sqrt{3}\cos\frac{7\pi}{6})$，则$\frac{1+\cos2\alpha}{2}+\sin2\alpha$的值为

A．$-\frac{1}{2}$或$\frac{7}{10}$　　B．$\frac{7}{10}$　　C．$\frac{21}{10}$　　D．$-\frac{1}{2}$

8．如图，在四棱锥$P-ABCD$中，底面$ABCD$是边长为2的正方形，侧面PAB为等边三角形，平面$PAB\perp$平面$ABCD$，M为PD上一点，N为BC上一点，直线$NM\perp$平面PAD，则ΔPND的面积为



A．$\sqrt{2}$

B．$\sqrt{3}$

C．$\sqrt{6}$

D．3

二、多项选择题：本大题共4小题．每小题5分，共20分．在每小题给出的四个选项中，有多项符合题目要求．全部选对的得5分，选对但不全的得2分，有选错的得0分．

9．已知等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n（$n\in\mathrm{N}^*$），公差$d\neq0$，$S_{11}=110$，a_7是a_3与a_9的等比中项，则下列选项正确的是

A．$a_{12}=a_3+a_9=20$　　B．$d=-2$

C．当$n=10$或$n=11$时，S_n取得最大值　　D．当$S_n>0$时，n的最大值为21

10．将函数 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$（$-\pi<\varphi<\pi$）的图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后得到函数 $g(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象，则下列说法正确的是

A．$\varphi=-\frac{\pi}{3}$

B．函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{3},0)$ 成中心对称

C．函数 $f(x)$ 的最小正周期为 π

D．函数 $f(x)$ 的一个单调递增区间为 $[-\frac{\pi}{12},\frac{5\pi}{12}]$

11．已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 为正四棱柱，底面边长为 2，高为 4，则下列说法正确的是

A．异面直线 AD_1 与 A_1C_1 所成角为 $\frac{\pi}{3}$

B．三棱锥 $A-A_1B_1D_1$ 的外接球的表面积为 24π

C．平面 AB_1D_1 // 平面 BDC_1

D．B_1 到平面 A_1BC_1 的距离为 $\frac{4}{3}$

12．设正实数 a，b 满足 $a+b=4$，则

A．$\sqrt{ab}$ 有最大值 2

B．$\frac{1}{a+2b}+\frac{1}{a}$ 有最小值 $\frac{2}{3}$

C．a^2+b^2 有最小值 4

D．$\sqrt{a}+\sqrt{b}$ 有最大值 $2\sqrt{2}$

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．已知 $|\vec{a}|=2,|\vec{b}|=1$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{3}$，则 $|\vec{a}-\vec{b}|=$_________．

14．若 $2^m=3^n=t$，且 $2m+3n=mn\neq 0$，则 $t=$_______．

15．已知 $f(x)$ 是定义域为 R 的奇函数，$y=f(x+1)$ 为偶函数，当 $0\le x\le 1$ 时，$f(x)=\sqrt{x}$，若 $a=f(2019),b=f(2021),c=f(2022)$，则 a,b,c 的大小关系是___________．

16．已知 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$S_n=14n-n^2$，则 $a_n=$_________；

若 $T_n=|a_1|+|a_2|+|a_3|+\ldots+|a_n|$，则 $T_{20}=$___________．

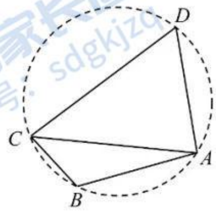
四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（本题满分 10 分）

如图，某圆形海域上有四个小岛，小岛 A 与小岛 B 相距为 $5\,\text{nmile}$，小岛 A 与小岛 C 相距为 $3\sqrt{5}\,\text{nmile}$，小岛 B 与小岛 C 相距为 $2\,\text{nmile}$，$\angle CAD$ 为钝角，且 $\sin\angle CAD=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$．

（1）求小岛 A、B、C 围成的三角形的面积；

（2）求小岛 A 与小岛 D 之间的距离．

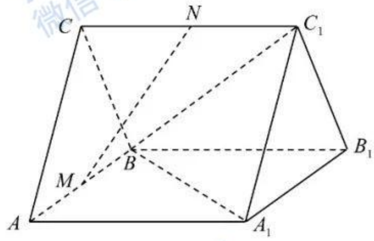


18．（本题满分 12 分）

如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的所有棱长都是 2，$AA_1\perp$ 平面 ABC，M 为 AB 中点，点 N 为 CC_1 的中点．

（1）求证：直线 $MN\,//$ 平面 A_1BC_1；

（2）求直线 MN 到平面 A_1BC_1 的距离．



19．（本题满分 12 分）

已知 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，$a_1=2$， $7S_n+2=a_{n+1}$，$b_n=\dfrac{1}{\log_2 a_n.\log_2 a_{n+1}}$，

T_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和．

（1）求 $\{a_n\}$ 通项公式；

（2）若 $m>2022T_n$ 对所有 $n\in \mathrm{N}^*$ 恒成立，求满足条件的最小整数 m 值．

20．（本题满分 12 分）

在"①$2a\cos B=c$；②$\vec{m}=(a,c-b),\vec{n}=(c+b,a+b)$，$\vec{m}//\vec{n}$"这两个条件中任选一个，补充在下面问题中，并进行求解．

问题：在 ΔABC 中，a,b,c 分别是三内角 A,B,C 的对边，已知 $b=4$，D 是 AB 边上的点，且 $\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{DB}$，$\sin A\sin B(2-\cos C)=\dfrac{1}{2}\sin^2\dfrac{C}{2}+\dfrac{1}{4}$，若__________，求 CD 的长度．

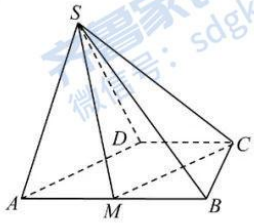
注：如果选择多个条件分别进行解答，按第一个解答进行计分．

21.（本题满分 12 分）

四棱锥$S-ABCD$的底面$ABCD$为直角梯形，$AB=2BC=2CD=4$，$AB\perp BC$，$AB\parallel CD$，$SA=SD$，且平面$SAD\perp$平面$ABCD$，M为AB中点.

(1) 求证：$CM\perp SM$；

(2) 若直线SB与平面SAD所成角为$\frac{\pi}{4}$，求平面SAD与平面SBC夹角的余弦值.



22.（本题满分 12 分）

已知函数$f(x)=\dfrac{\ln x+ax}{x}$，$a\in \mathbf{R}$.

(1) 若$a=0$，求$f(x)$的最大值；

(2) 若$0<a<1$，求证：$f(x)$有且只有一个零点；

(3) 设$0<m<n$且$m^n=n^m$，求证：$m+n>2e$.

2021—2022 学年度第一学期第一学段模块检测

高三数学答案及评分标准

一、单项选择题：本大题共 8 小题．每小题 5 分，共 40 分．

BCAC　　DABC

二、多项选择题：本大题共 4 小题．每小题 5 分，共 20 分．

9．BC；　10．ACD；　11．BCD；　12．AD．

三、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．

13．$\sqrt{7}$；　14．72；　15．$a<c<b$；　16．$15-2n$；218．

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．

17．（本小题满分 10 分）

解：(1) 在ΔABC中，由余弦定理得，

$\cos\angle ABC=\dfrac{BA^2+BC^2-AC^2}{2BA\cdot BC}=\dfrac{5^2+2^2-(3\sqrt{5})^2}{2\times5\times2}=-\dfrac{4}{5}$ ………………… 2 分

所以$\sin\angle ABC=\dfrac{3}{5}$ ………………… 3 分

所以$S_{\Delta ABC}=\dfrac{1}{2}BA\cdot BC\sin\angle ABC=\dfrac{1}{2}\times5\times2\times\dfrac{3}{5}=3$

所以小岛 A、B、C 围成的三角形的面积为 3 nmile^2 ………………… 5 分

(2) 因为 A，B，C，D 四点共圆，所以角$\angle ABC$与角$\angle ADC$互补，

所以$\sin\angle ADC=\dfrac{3}{5}$，$\cos\angle ADC=\dfrac{4}{5}$ ………………… 6 分

因为$\sin\angle CAD=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$，且$\angle CAD$为钝角，所以$\cos\angle CAD=-\sqrt{1-(\dfrac{2\sqrt{5}}{5})^2}=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

所以

$\sin\angle ACD=\sin(\angle ADC+\angle CAD)=\sin\angle ADC\cos\angle CAD+\cos\angle ADC\sin\angle CAD$

$=\dfrac{3}{5}\times(-\dfrac{\sqrt{5}}{5})+\dfrac{4}{5}\times\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ ………………… 8 分

在ΔACD中，由正弦定理得：$\dfrac{AD}{\sin\angle ACD}=\dfrac{AC}{\sin\angle ADC}$

所以 $AD=\dfrac{AC\cdot\sin\angle ACD}{\sin\angle ADC}=\dfrac{3\sqrt{5}\times\dfrac{\sqrt{5}}{5}}{\dfrac{3}{5}}=5$

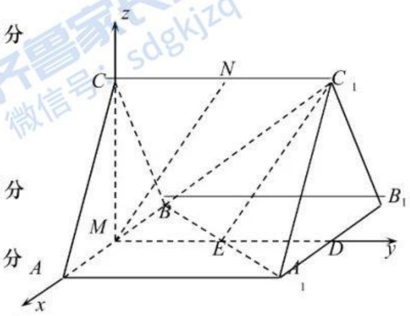
所以小岛 A 与小岛 D 之间的距离为 5 nmile……10 分

18.（本小题满分 12 分）

证明：（1）取 A_1B_1 中点 D，连接 MD 交 A_1B 于 E，连接 C_1E，

$\because$ 在三棱柱中，M 为 AB 中点，

$\therefore MD\,//\,AA_1$，$ME=\dfrac{1}{2}AA_1$……2 分



$\because$ 点 N 为 CC_1 的中点

$\therefore NC_1\,//\,AA_1$ 且 $NC_1=\dfrac{1}{2}AA_1$

$\therefore NC_1\,//\,ME$ 且 $NC_1=ME$……3 分

$\therefore$ 四边形 MNC_1E 为平行四边形

$\therefore MN\,//\,C_1E$……4 分

又 $MN\not\subset$ 平面 A_1BC_1，$C_1E\subset$ 平面 A_1BC_1

$\therefore MN\,//$ 平面 A_1BC_1……5 分

（2）由（1）得，点 M 到平面 A_1BC_1 的距离即为直线 MN 到平面 A_1BC_1 的距离

连接 MC，则 $MC\perp AB$

$\because AA_1\perp$ 平面 ABC，$MD\,//\,AA_1$

$\therefore MD\perp$ 平面 ABC，$\therefore MA$，MD，MC 两两垂直，

以 M 为原点，MA，MD，MC 所在直线分别为 x 轴、y 轴、z 轴，

建立如图所示的空间直角坐标系……6 分

则 $A_1(1,2,0),B(-1,0,0),C_1(0,2,\sqrt{3})$

$\therefore \overrightarrow{BA_1}=(2,2,0),\overrightarrow{BC_1}=(1,2,\sqrt{3})$，

设平面 A_1BC_1 的一个法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

$\therefore \begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BA_1}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}2x+2y=0\\ x+2y+\sqrt{3}z=0\end{cases}$

取 $y=-1$，则 $x=1,z=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，$\vec{n}=(1,-1,\dfrac{\sqrt{3}}{3})$，……9 分

又 $\overrightarrow{MB}=(-1,0,0)$，所以点 M 到平面 A_1BC_1 的距离为 $\dfrac{|\overrightarrow{MB}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}=\dfrac{\sqrt{21}}{7}$

即直线 MN 到平面 A_1BC_1 的距离为 $\dfrac{\sqrt{21}}{7}$……12 分

19．（本小题满分12分）

解 （1）由题意 $7S_n+2=a_{n+1}$

当 $n\geq 2$ 时，$7S_{n-1}+2=a_n$

两式相减得：$7a_n=a_{n+1}-a_n$ ……………………………… 1 分

即：$a_{n+1}=8a_n$（$n\geq 2$）

所以 $n\geq 2$ 时，$\{a_n\}$ 为等比数列 ……………………………… 2 分

又因为 $n=1$ 时，$a_2=7S_1+2=7\times 2+2=16$

所以 $\dfrac{a_2}{a_1}=8$ ……………………………… 3 分

所以，对所有 $n\in N^*$，$\{a_n\}$ 是以 2 为首项，8 为公比的等比数列 ……………………………… 4 分

所以 $a_n=2\times 8^{n-1}=2^{3n-2}$ ……………………………… 5 分

(2) 由题知：$b_n=\dfrac{1}{\log_2 a_n\cdot\log_2 a_{n+1}}=\dfrac{1}{\log_2 2^{3n-2}\cdot\log_2 2^{3n+1}}$

$=\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ ……………………………… 6 分

$=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)$ ……………………………… 8 分

所以 $T_n=b_1+b_2+\ldots+b_n=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{7}+\cdots+\dfrac{1}{3n-2}-\dfrac{1}{3n+1}\right)=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3n+1}\right)$ …… 10 分

所以 $2022T_n=2022\times\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3n+1}\right)=674\left(1-\dfrac{1}{3n+1}\right)<674$ ……………………………… 11 分

所以满足 $m>2022T_n$ 恒成立的最小 m 值为 674． ……………………………… 12 分

20．（本小题满分 12 分）

解：若选择条件①

由 $2a\cos B=c$，根据正弦定理得 $2\sin A\cos B=\sin C$ ……………………………… 1 分

所以 $2\sin A\cos B=\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin C$

即 $\sin A\cos B-\cos A\sin C=0$，也即 $\sin(A-B)=0$ ……………………………… 2 分

因为 $-\pi<A-B<\pi$，所以 $A=B$ （1）式 ……………………………… 3 分

又因为 $\sin A\sin B(2-\cos C)=\dfrac{1}{2}\sin^2\dfrac{C}{2}+\dfrac{1}{4}$

即 $\sin A\sin B[2-(1-2\sin^2\dfrac{C}{2})]=\dfrac{1}{2}\sin^2\dfrac{C}{2}+\dfrac{1}{4}$，所以 $\sin A\sin B=\dfrac{1}{4}$ ……………………………… 5 分

又由（1）式，$\sin A=\sin B$，所以 $\sin A=\sin B=\dfrac{1}{2}$ ……………………………… 6 分

所以 $A=B=\dfrac{\pi}{6},C=\dfrac{2\pi}{3}$ ……………………………… 7 分

所以$b=a=4$，$AB=2CA\cos\frac{\pi}{6}=4\sqrt{3}$ ······8分

因为$\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{DB}$，所以$AD=\frac{3}{4}AB=3\sqrt{3}$，$DB=\sqrt{3}$ ······9分

在ΔACD中，

$CD^2=AC^2+AD^2-2AC\cdot AD\cos\frac{\pi}{6}=4^2+(3\sqrt{3})^2-2\times4\times3\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7$ ······11分

所以$CD=\sqrt{7}$ ······12分

若选择条件②

因为$\overrightarrow{m}=(a,c-b)$，$\overrightarrow{n}=(c+b,a+b)$，且$\overrightarrow{m}//\overrightarrow{n}$

所以$a(a+b)=(c-b)(c+b)$

即$a^2+b^2-c^2=-ab$ ······1分

所以$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=-\frac{1}{2}$ 2分

$0<C<\pi$，所以$C=\frac{2\pi}{3}$ (1)式 ······3分

又因为$\sin A\sin B(2-\cos C)=\frac{1}{2}\sin^2\frac{C}{2}+\frac{1}{4}$

即$\sin A\sin B[2-(1-2\sin^2\frac{C}{2})]=\frac{1}{2}\sin^2\frac{C}{2}+\frac{1}{4}$

所以$\sin A\sin B=\frac{1}{4}$ (2)式 ······4分

$C=\frac{2\pi}{3}$，$B=\frac{\pi}{3}-A$ ······5分

所以$\sin A\sin(\frac{\pi}{3}-A)=\frac{1}{4}$ ······6分

所以$\sin A(\sin\frac{\pi}{3}\cos A-\cos\frac{\pi}{3}\sin A)=\frac{1}{4}$

所以$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A\cos A-\frac{1}{2}\sin^2A=\frac{1}{4}$，也即$\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2A-\frac{1-\cos 2A}{4}=\frac{1}{4}$

所以$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2A+\frac{1}{2}\cos 2A=1$

即$\sin(2A+\frac{\pi}{6})=1$ ······7分

高三数学答案 第4页（共7页）

因为$\frac{\pi}{6}<2A+\frac{\pi}{6}<\frac{5\pi}{6}$

所以$2A+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$，所以$A=\frac{\pi}{6},B=\frac{\pi}{6}$ ……………………………………………………… 8 分

所以$b=a=4$， $AB=2CA\cos\frac{\pi}{6}=4\sqrt{3}$

$AD=3DB$，所以 $AD=\frac{3}{4}\overline{AB}=3\sqrt{3},DB=\sqrt{3}$ ……………………………………… 9 分

在ΔACD 中，

$CD^2=AC^2+AD^2-2AC.AD\cos\frac{\pi}{6}=4^2+(3\sqrt{3})^2-2\times4\times3\sqrt{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=7$ ………… 11 分

所以$CD=\sqrt{7}$ ……………………………………………………………………………… 12 分

21．（本小题满分12分）

解：(1)证明：取 AD 中点 H，连接 SH,MH,MD

因为$SA=SD$，所以$SH\perp AD$ …………………………………………………………… 1 分

因为平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$

所以$SH\perp$平面 $ABCD$ ………………………………………… 2 分

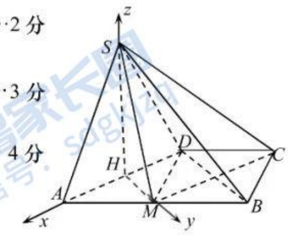
$CM\subset$平面 $ABCD$

所以$SH\perp CM$ ……………………………………………………… 3 分

因为 M 为 AB 的中点

所以$MA=MD=1$，所以$MH\perp AD$ ……………………… 4 分

因为$AM\,//\,CD,AM=CD=1$，



所以四边形 $AMCD$ 为平行四边形，所以$CM\,//\,AD$

所以$MH\perp CM$ ……………………………………………………………………………… 5 分

因为 $SH\cap HM=H$，所以$CM\perp$ 平面 SHM

所以$CM\perp SM$ ……………………………………………………………………………… 6 分

(2) 连结 BD，由题四边形 $MBCD$ 为平行四边形，$AB\perp BC$，$BC=CD$

所以四边形 $MBCD$ 为正方形，所以 $BD\perp CM$

因为 $AD\,//\,CM$，所以 $BD\perp AD$

因为平面 $SAD\perp$ 平面 $ABCD$，所以 $BD\perp$ 平面 SAD

所以$\angle BSD$ 即为 SB 与平面 SAD 所成角，所以$\angle BSD=\frac{\pi}{4}$ ……………………………… 7 分

$BD=2\sqrt{2}$，所以 $BD=2\sqrt{2}$，所以ΔSAD为等边三角形，所以$SH=\sqrt{6}$ 8 分

以 H 为原点，分别以 HA,HM,HS 所在直线为 x 轴、y 轴、z 轴，

建立空间直角坐标系如图，

则 $H(0,0,0), S(0,0,\sqrt{6})$， $M(0,\sqrt{2},0), B(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 0), C(-2\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0)$

HM 为平面 SAD 的法向量，$\overrightarrow{HM}=(0,\sqrt{2},0)$，……………………………………9 分

又因为 $\overrightarrow{BC}=(-\sqrt{2},-\sqrt{2},0), \overrightarrow{SB}=(-\sqrt{2}, 2\sqrt{2}, -\sqrt{6})$,

设平面 SBC 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，

则 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{BC}=0\\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{SB}=0\end{cases}$，所以 $\begin{cases}-\sqrt{2}x-\sqrt{2}y=0\\ -\sqrt{2}x+2\sqrt{2}y-\sqrt{6}z=0\end{cases}$，

令 $z=1$，解得：$x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$，$y=\frac{\sqrt{3}}{3}$，所以 $\vec{n}=(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3},1)$……………………… 11 分

所以 $\cos<\overrightarrow{HM},\vec{n}>=\frac{\overrightarrow{HM}\cdot\vec{n}}{|\overrightarrow{HM}||\vec{n}|}=\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}}{\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{15}}{3}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$

所以平面 SAD 与平面 SBC 夹角的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$……………………………………… 12 分

22．（本小题满分12分）

解：（1）由题知：若 $a=0$，则 $f(x)=\frac{\ln x}{x}$，其定义域为 $(0,+\infty)$……………………… 1 分

所以 $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$………………………………………………………………… 2 分

由 $f'(x)=0$ 得 $x=e$

所以，当 $0<x<e$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>e$ 时，$f'(x)<0$

所以，$f(x)$ 在 $(0,e]$ 上单调递增，在 $[e,+\infty)$ 上单调递减……………………………… 3 分

所以 $f(x)_{max}=f(e)=\frac{1}{e}$ 4 分

（2）由题知：$f'(x)=\frac{(\frac{1}{x}+a)x-\ln x-ax}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$………………………………… 5 分

由（1）知，$f(x)$ 在 $(0,e]$ 上单调递增，在 $[e,+\infty)$ 上单调递减

因为 $0<a<1$，

当 $x>e$ 时，$f(x)=\frac{\ln x+ax}{x}=a+\frac{\ln x}{x}>a>0$，

则 $f(x)$ 在 $(e,+\infty)$ 无零点……………………………………………………………… 6 分

当 $0<x<e$ 时，$f(x)=\frac{\ln x+ax}{x}=a+\frac{\ln x}{x}$，

又因为 $f(\frac{1}{e})=a-e<0$ 且 $f(e)=a+\frac{1}{e}>0$

所以 $f(x)$ 在 $(0,e)$ 上有且只有一个零点

所以，当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 有且只有一个零点……………………………………8 分

（3）因为 $m^n=n^m$ 等价于 $\frac{\ln m}{m}=\frac{\ln n}{n}$……………………………………9 分

由（1）知：若 $a=0$，$f(x)=\frac{\ln x}{x}$，且 $f(x)$ 在 $(0,e]$ 上单调递增，在 $[e,+\infty)$ 上单调递减，

且 $0<m<n$，所以 $0<m<e,n>e$，即 $0<m<e<n$……………………………………10 分

令 $g(x)=(2e-x)\ln x-x\ln(2e-x),\ 0<x<e$，

所以 $g'(x)=-\ln x+\frac{2e-x}{x}-\ln(2e-x)+\frac{x}{2e-x}=-\ln[x(2e-x)]+\frac{2e-x}{x}+\frac{x}{2e-x}$

$=-\ln[(x-e)^2+e^2]+\frac{2e-x}{x}+\frac{x}{2e-x}>-\ln e^2+2=0$

所以 $g(x)$ 在 $(0,e)$ 上单调递增，$g(x)<g(e)=0$……………………………………11 分

所以 $\frac{\ln x}{x}<\frac{\ln(2e-x)}{2e-x}$，$0<x<e$

又因为 $0<m<e<n$ 且 $\frac{\ln m}{m}=\frac{\ln n}{n}$，所以 $\frac{\ln n}{n}=\frac{\ln m}{m}<\frac{\ln(2e-m)}{2e-m}$

又因为 $n>e$，$2e-m>e$，且 $f(x)$ 在 $[e,+\infty)$ 上单调递减

所以 $n>2e-m$，即 $m+n>2e$……………………………………12 分

关于我们

齐鲁家长圈系业内权威、行业领先的自主选拔在线旗下子平台，集聚高考领域权威专家，运营团队均有多年高考特招研究经验，熟知山东新高考及特招政策，专为山东学子服务！聚焦山东新高考，提供新高考资讯、新高考政策解读、志愿填报、综合评价、强基计划、专项计划、双高艺体、选科、生涯规划等政策资讯服务，致力于做您的山东高考百科全书。

第一时间获取山东高考升学资讯，关注**齐鲁家长圈**微信号：**sdgkjzq。**