高三文科数学

考生注意：

1. 本试卷分选择题和非选择题两部分。满分 150 分，考试时间 120 分钟。
2. 答题前，考生务必用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔将密封线内项目填写清楚。
3. 考生作答时，请将答案答在答题卡上。选择题每小题选出答案后，用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑；非选择题请用直径 0.5 毫米黑色墨水签字笔在答题卡上各题的答题区域内作答，**超出答题区域书写的答案无效，在试题卷、草稿纸上作答无效。**
4. 本卷命题范围：集合，常用逻辑用语，函数，导数及其应用。

一、选择题：本题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 命题“$\forall x>0, e^x \geqslant x+1$”的否定是

A. $\forall x>0, e^x<x+1$　　B. $\exists x\leqslant 0, e^x<x+1$

C. $\exists x>0, e^x<x+1$　　D. $\forall x\leqslant 0, e^x<x+1$

2. 已知集合 $A=\{x|x\geqslant a\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，$A\cap B=\{3,4\}$，则 a 的最大值为

A. 4　　B. 3　　C. 2　　D. 1

3. 设函数 $f(x)=\frac{1}{x^3+1}$，则下列函数中为偶函数的是

A. $f(x+1)$　　B. $f(2x)$　　C. $f(x-1)$　　D. $f(x^2)$

4. 已知幂函数 $f(x)$ 的图象经过点 $A(8,2)$ 与点 $B(27,t)$，若 $a=t^{0.1}$，$b=0.3^t$，$c=\log_{0.2}t$，则

A. $a<b<c$　　B. $b<a<c$　　C. $c<b<a$　　D. $c<a<b$

5. 碳 14 的半衰期为 5 730 年. 在考古中，利用碳 14 的半衰期可以近似估计目标物所处的年代. 生物体内碳 14 含量 y 与死亡年数 x 的函数关系式是 $y=A_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5730}}$（其中 A_0 为生物体死亡时体内碳 14 含量）. 考古学家在对考古活动时挖掘到的某生物标本进行研究，发现该生物体内碳 14 的含量是原来的 80%，由此可以推测到发掘出该生物标本时，该生物体在地下大约已经过了（参考数据：$\lg 2\approx 0.301$）

A. 1 847 年　　B. 2 022 年　　C. 2 895 年　　D. 3 010 年

6. “$a<2$”是“$f(x)=|x-a|$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增”的

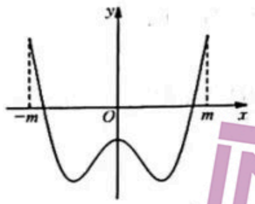
A. 充分不必要条件

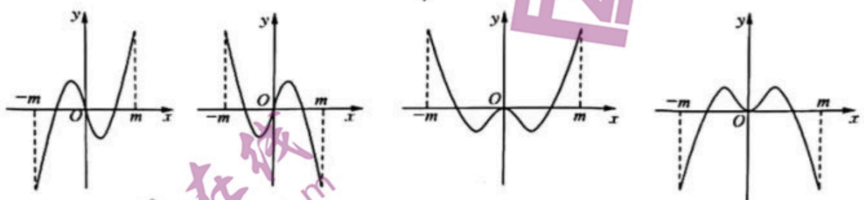
B. 必要不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

7. 如图为函数 $f(x)$（其定义域为$[-m,m]$）的图象，若 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$，则 $y=f'(x)$ 的图象可能是





A　　　　B　　　　C　　　　D

8. 已知函数 $f(x)=x-\frac{\ln x}{x}$，则

A. $f(x)$的单调递减区间为$(0,e)$　　　　B. $f(x)$的极小值为 1

C. $f(x)$的最小值为-1　　　　D. $f(x)$的最大值为 1

9. 设函数 $f(x)=-x^3+12ax$ 的图象在点$(a,f(a))$处的切线为 l，当 l 的斜率最大时，切线 l 的方程为

A. $12x+y+16=0$　　B. $12x+y-16=0$　　C. $12x-y+16=0$　　D. $12x-y-16=0$

10. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$的导函数为 $f'(x)$，若对任意实数 x，$xf'(x)+f(x)<0$ 恒成立，且$f(1)=3$，则不等式 $f(e^{-x})<3e^x$ 的解集为

A. $(-\infty,0)$　　B. $(-\infty,-1)$　　C. $(\ln 3,+\infty)$　　D. $(1,+\infty)$

11. 设函数 $f(x)=\begin{cases}2x^2+x, x\leqslant 0,\\ -2x^2, x>0,\end{cases}$ 若 $f(f(a))-f(a)+1=0$，则实数 a 的值为

A. $\frac{1+\sqrt{5}}{4}$　　B. $\frac{1-\sqrt{5}}{4}$　　C. $\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$　　D. $\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$

12. 设函数 $f(x)=(x-1)(e^x-e)$，$g(x)=\ln x-ax(a\in\mathbf{R})$. 若对任意的正实数 x_1,x_2，不等式$f(x_1)\geqslant g(x_2)$恒成立，则 a 的最小值为

A. 0　　B. 1　　C. $\frac{1}{e}$　　D. e

二、填空题：本题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 计算：$3^{2+\log_9 3}=$________．(可保留根式)

14. 若函数 $f(x)=g(x)\cdot\cos x$ 为奇函数，则 $g(x)=$________．(填写一个符合条件的解析式即可)

15. 已知 $f(x)$是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数，且 $f(1-x)=f(x)$，当 $x\in\left[-\frac{1}{2},0\right)$时，$f(x)=-\sqrt{-x}$，则 $f\left(\frac{13}{4}\right)=$________．

16. 若函数 $f(x)=ax^2+x-1-e^x$ 有且只有一个零点，则实数 a 的取值范围是________．

三、解答题：共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17.（本小题满分 10 分）

已知集合 $A=\{x|3^x>3\}$，$B=\{x|x^2-3x\leqslant 0\}$.

(1)求 $B\cup(\complement_{R}A)$；

(2)若 $C=\{x|a-1\leqslant x\leqslant 2a\}$，且 $B\cap C=C$，求实数 a 的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

已知 $f(x)=\log_a x+\log_a(4-x)(a>0$ 且 $a\neq 1)$，且 $f(2)=2$.

(1)求 a 的值及 $f(x)$ 的定义域；

(2)求 $f(x)$ 在 $\left[1,\frac{7}{2}\right]$ 上的值域.

19.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=3^x+k\cdot 3^{-x}(k\in\mathbf{R})$.

(1)若 $f(x)$ 是偶函数，求 k 的值；

(2)若 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递减，求 k 的取值范围.

20.(本小题满分 12 分)

设 p:函数 $f(x)=x^{m+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减;q:关于 x 的方程 $x^2+2(m-2)x-3m+10=0$ 无实根.

(1)若 $p\wedge q$ 为真,求实数 m 的取值范围;

(2)若 $p\vee q$ 为真且 $p\wedge q$ 为假,求实数 m 的取值范围.

21.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=x\ln x$,$g(x)=-x^2-ax-4$ $(a\in\mathbf{R})$.

(1)求函数 $f(x)$ 的极值;

(2)若对任意 $x\in(0,+\infty)$,不等式 $f(x)>\frac{1}{3}g(x)$ 恒成立,求 a 的取值范围.

22.(本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x)=e^x+(1-a)x(a\in\mathbf{R})$.

(1)讨论函数 $f(x)$ 的单调性;

(2)证明:当 $a\leqslant1$ 时,对任意 $x>0$,恒有 $f(x)>\ln x+a+1$.

高三文科数学参考答案、提示及评分细则

1. C　命题“$\forall x>0, e^x\geqslant x+1$”中含有全称量词，故该命题的否定需要将全称量词改为存在量词，且只否定结论，不否定条件，所以该命题的否定为“$\exists x>0, e^x<x+1$”. 故选 C.

2. B　因为 $A=\{x|x\geqslant a\}$，$B=\{1,2,3,4\}$，且 $A\cap B=\{3,4\}$，由交集定义知 $2<a\leqslant 3$，则 a 的最大值为 3. 故选 B.

3. D　$f(x^2)=\frac{1}{(x^2)^3+1}=\frac{1}{x^6+1}$是偶函数，其余皆不是. 故选 D.

4. C　设 $f(x)=x^a$，由题意知 $8^a=2, 27^a=t$，故 $a=\frac{1}{3}$，$t=3$. $a=3^{0.1}>1, 0<b=0.3^3<1, c=\log_{0.2}3<0$，所以 $c<b<a$. 故选 C.

5. A　由题意知 $A_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5\,730}}=0.8A_0$，所以$\frac{x}{5\,730}\lg\frac{1}{2}=\lg\frac{8}{10}$，所以 $x=5\,730\times\frac{1-3\lg 2}{\lg 2}$，所以 $x\approx 5\,730\times\frac{1-0.903}{0.301}\approx$ 1 847. 故选 A.

注意：此题可通过估算，进行选择：

因为 $x=5\,730\times\frac{1-3\lg 2}{\lg 2}\approx 5\,730\times\frac{1-0.903}{0.301}=5\,730\times\frac{0.097}{0.301}<5\,730\times\frac{1}{3}<2\,000$，故选 A.

6. B　若 $f(x)=|x-a|$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则 $a\leqslant 1$，此时 $a<2$ 成立；若 $a<2$，得不到 $a\leqslant 1$，故“$a<2$”是“$f(x)=|x-a|$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增”的必要不充分条件. 故选 B.

7. A　由 $f(x)$ 图象知 $f(x)$ 在 $[-m,0]$ 上先减后增，故 $f'(x)$ 在 $[-m,0]$ 上函数值先负后正，同理 $f'(x)$ 在 $[0,m]$ 上的符号也是先负后正，四个选项中仅有选项 A 符合. 故选 A.

8. B　法 1：$f'(x)=1-\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x^2+\ln x-1}{x^2}$，$x\in(0,+\infty)$. 令 $\varphi(x)=x^2+\ln x-1$，则 $\varphi'(x)=2x+\frac{1}{x}>0$，所以 $\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，又 $\varphi(1)=0$，则当 $0<x<1$ 时，$\varphi(x)<0$，即 $f'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$\varphi(x)>0$，即 $f'(x)>0$，所以 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0,1)$；单调递增区间为 $(1,+\infty)$，所以 $f(x)_{极小值}=f(1)=1$，所以 $f(x)_{\min}=1$，$f(x)$ 不存在最大值. 故选 B.

法 2：$f'(x)=1-\frac{1-\ln x}{x^2}=\frac{x^2+\ln x-1}{x^2}$，$x\in(0,+\infty)$. 显然 $f'(1)=0$，且当 $0<x<1$ 时，$x^2+\ln x-1<0$，所以 $f'(x)<0$，当 $x>1$ 时，$x^2+\ln x-1>0$，所以 $f'(x)>0$，下同法 1.

9. C　$f'(x)=-3x^2+12a$，故切线 l 的斜率 $k=f'(a)=-3a^2+12a=-3(a-2)^2+12$，所以当 $a=2$ 时，k 取得最大值 12，此时 $f(2)=-2^3+12\times 2\times 2=40$，即切点为 $(2,40)$，所以切线 l 的方程为 $y-40=12(x-2)$，即 $12x-y+16=0$. 故选 C.

10. A　设 $g(x)=xf(x)$，则 $g'(x)=xf'(x)+f(x)<0$，所以 $g(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递减，而 $f(e^{-x})<3e^x$ 可化为 $e^{-x}f(e^{-x})<1\times f(1)$，即 $g(e^{-x})<g(1)$，所以 $e^{-x}>1$，所以 $-x>0$，所以 $x<0$. 故选 A.

11. D　设 $f(a)=t$，由 $f(f(a))-f(a)+1=0$，则 $f(t)-t+1=0$.

(1)当 $t\leqslant 0$ 时，$2t^2+t-t+1=0$，则 $2t^2+1=0$，无解；

(2)当 $t>0$ 时，$-2t^2-t+1=0$，即 $2t^2+t-1=0$，解得 $t=-1$(舍)，或 $t=\frac{1}{2}$，所以 $f(a)=\frac{1}{2}$，

①当 $a\leqslant 0$ 时，$2a^2+a=\frac{1}{2}$，解得 $a=\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$，或 $a=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$(舍)；②当 $a>0$ 时，$-2a^2=\frac{1}{2}$，无解，综上所述，$a=$

$\frac{-1-\sqrt{5}}{4}$. 故选 D.

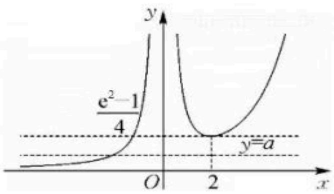
12. C "对任意正实数 x_1,x_2,不等式 $f(x_1)\geqslant g(x_2)$ 恒成立"等价于"$x\in(0,+\infty)$时,$f_{\min}(x)\geqslant g(x)_{\max}$",对于 $f(x)$,当 $0<x<1$ 时,$x-1<0$,$e^x-e<0$,所以 $f(x)>0$;当 $x\geqslant1$ 时,$x-1\geqslant0$,$e^x-e\geqslant0$,所以 $f(x)\geqslant0$,当且仅当 $x=1$ 时取等号,所以 $f_{\min}(x)=0$. 所以当 $x>0$ 时,$g(x)=\ln x-ax\leqslant0$,所以 $a\geqslant\frac{\ln x}{x}$恒成立,令 $h(x)=\frac{\ln x}{x}$,$h'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$;当 $0<x<e$ 时,$h'(x)>0$,当 $x>e$ 时,$h'(x)<0$,所以 $h(x)$在$(0,e)$上单调递增,在$(e,+\infty)$上单调递减;所以 $h(x)_{\max}=h(e)=\frac{\ln e}{e}=\frac{1}{e}$,所以 $a\geqslant\frac{1}{e}$,所以 a 的最小值为$\frac{1}{e}$. 故选 C.

13. $9\sqrt{3}$　$3^{2+\log_9 3}=3^2\times3^{\log_9 3}=9\times3^{\log_3\sqrt{3}}=9\sqrt{3}$.

14. $x,x^3,\sin x$ 等(答案不唯一,答对一个就得 5 分)　由 $f(x)=g(x)\cdot\cos x$ 为奇函数,则 $f(-x)=-f(x)$,即 $g(-x)\cos(-x)=-g(x)\cdot\cos x$ 恒成立,考虑到 $\cos x$ 的任意性,可得 $g(-x)=-g(x)$,则 $g(x)$为奇函数,故 $g(x)=x,x^3,\sin x$ 等(答案不唯一).

15. $-\frac{1}{2}$　由 $f(x)$是奇函数及 $f(1-x)=f(x)$得 $f(1+x)=-f(x)$,所以 $f(x+2)=-f(x+1)=f(x)$,从而$f(x)$是周期为 2 的周期函数. 所以 $f\left(\frac{13}{4}\right)=f\left(\frac{13}{4}-2\right)=f\left(\frac{5}{4}\right)=f\left(1-\frac{5}{4}\right)=f\left(-\frac{1}{4}\right)=-\sqrt{-\left(-\frac{1}{4}\right)}=-\frac{1}{2}$.

16. $\left(0,\frac{e^2-1}{4}\right)$　问题等价于关于 x 的方程 $ax^2+x-1-e^x=0$ 有且只有一个解,当 $x=0$ 时,方程显然不成立,所以 $x\neq0$,所以 $a=\frac{e^x-x+1}{x^2}$,令 $h(x)=\frac{e^x-x+1}{x^2}$,所以问题转化为直线 $y=a$ 与 $h(x)$的图象有且只有一个公共点. $h'(x)=\frac{(e^x-1)x^2-2x(e^x-x+1)}{x^4}=\frac{(x-2)(e^x+1)}{x^3}$,因为 $e^x+1>0$,所以当 $x\in(-\infty,0)$或 $x\in(2,+\infty)$时,$h'(x)>0$;当 $x\in(0,2)$时,$h'(x)<0$,所以 $h(x)$在$(-\infty,0)$和$(2,+\infty)$上单调递增;在$(0,2)$上单调递减,所以 $h(x)$的极小值为 $h(2)=\frac{e^2-1}{4}$. 其图象大致如图所示:



所以当 $0<a<\frac{e^2-1}{4}$时,直线 $y=a$ 与函数$h(x)$的图象仅有一个公共点,即 $f(x)$有且只有一个零点,故 a 的取值范围为$\left(0,\frac{e^2-1}{4}\right)$.

17. 解:(1)因为 $A=\{x|3^x>3\}=(1,+\infty)$, ······ 1 分

$B=\{x|x^2-3x\leqslant0\}=[0,3]$, ······ 2 分

所以 $\complement_{\mathbf{R}}A=(-\infty,1]$, ······ 3 分

所以 $B\cup(\complement_{\mathbf{R}}A)=(-\infty,3]$. ······ 5 分

(2)由 $B\cap C=C$,得 $C\subseteq B$, ······ 6 分

当 $a-1>2a$,即 $a<-1$ 时,$C=\varnothing$,满足题意; ······ 7 分

当 $a-1\leqslant2a$,即 $a\geqslant-1$ 时,$C\neq\varnothing$,因为 $C\subseteq B$,所以$\begin{cases}a-1\geqslant0,\\2a\leqslant3,\end{cases}$ 解得 $1\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$. ······ 9 分

综上，实数 a 的取值范围是 $(-\infty,-1)\cup\left[1,\frac{3}{2}\right]$. ……………………………………………………… 10 分

18. 解：(1)由 $f(2)=2$ 得 $\log_a 2+\log_a(4-2)=2$，解得 $a=2$， ……………………………………………… 2 分

由 $\begin{cases}x>0,\\4-x>0,\end{cases}$ 得 $0<x<4$，故 $f(x)$ 的定义域为 $(0,4)$. ……………………………………………… 4 分

(2)由(1)及条件知 $f(x)=\log_2 x+\log_2(4-x)=\log_2 x(4-x)=\log_2[-(x-2)^2+4]$， ……………………… 5 分

设 $t=-(x-2)^2+4$，则当 $x=2$ 时，$t_{\max}=4$， ……………………………………………………………… 7 分

当 $x=1$ 时，$t=3$；当 $x=\frac{7}{2}$ 时，$t=\frac{7}{4}$，所以当 $x\in\left[1,\frac{7}{2}\right]$ 时，$t_{\min}=\frac{7}{4}$， ………………………………… 9 分

所以 $f(x)_{\max}=\log_2 4=2$，$f(x)_{\min}=\log_2\frac{7}{4}=\log_2 7-2$， ……………………………………………… 11 分

所以 $f(x)$ 的值域为 $[\log_2 7-2,2]$. ……………………………………………………………………………… 12 分

19. 解：(1)因为函数 $f(x)$ 为偶函数，

所以 $f(-x)=3^{-x}+k\cdot 3^{x}=f(x)=3^{x}+k\cdot 3^{-x}$ 恒成立， ……………………………………………………… 2 分

所以 $(3^{x}-3^{-x})(k-1)=0$ 恒成立，故 $k=1$. ………………………………………………………………… 4 分

(2)$f'(x)=3^{x}\ln 3-\frac{k\ln 3}{3^{x}}$，因为 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上单调递减，所以在 $[0,2]$ 上，$f'(x)=3^{x}\ln 3-\frac{k\ln 3}{3^{x}}\leqslant 0$ 恒成立，即

$k\geqslant 3^{2x}$ 在 $[0,2]$ 上恒成立. ………………………………………………………………………………………… 8 分

因为函数 $y=3^{2x}$ 在 $[0,2]$ 上单调递增，所以 $y_{\max}=3^{4}=81$， ……………………………………………… 10 分

所以 $k\geqslant 81$，即 k 的取值范围为 $[81,+\infty)$. ………………………………………………………………… 12 分

20. 解：(1)函数 $f(x)=x^{m+1}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减，则 $m+1<0$，解得 $m<-1$； ………………………… 1 分

由方程 $x^2+2(m-2)x-3m+10=0$ 无实根，得 $\Delta=4(m-2)^2-4(-3m+10)<0$，即 $m^2-m-6<0$，解得 $-2<m<3$，

……… 3 分

所以 p 为真时 $m<-1$，q 为真时 $-2<m<3$. …………………………………………………………………… 4 分

因为 $p\wedge q$ 为真，所以 p 为真且 q 为真，所以 $-2<m<-1$，

即 $p\wedge q$ 为真时，实数 m 的取值范围为 $(-2,-1)$. ………………………………………………………… 6 分

(2)由 $p\vee q$ 为真且 $p\wedge q$ 为假，得 p 与 q 一真一假. …………………………………………………… 7 分

当 p 真 q 假时，有 $\begin{cases}m<-1,\\m\geqslant 3\text{ 或 }m\leqslant -2,\end{cases}$ 解得 $m\leqslant -2$； ………………………………………………… 9 分

当 p 假 q 真时，有 $\begin{cases}m\geqslant -1,\\-2<m<3,\end{cases}$ 解得 $-1\leqslant m<3$， ……………………………………………… 11 分

故所求实数 m 的取值范围是 $(-\infty,-2]\cup[-1,3)$. …………………………………………………………… 12 分

21. 解：(1)$f(x)$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，$f'(x)=\ln x+1$， ……………………………………………………… 1 分

令 $f'(x)>0$，得 $x>\frac{1}{e}$，令 $f'(x)<0$，得 $0<x<\frac{1}{e}$，

所以 $f(x)$ 在 $\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$ 上单调递增，在 $\left(0,\frac{1}{e}\right)$ 上单调递减； ………………………………………… 3 分

所以当 $x=\frac{1}{e}$ 时，$f(x)$ 取得极小值，且极小值为 $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ln\frac{1}{e}=-\frac{1}{e}$；无极大值. ……………………… 5 分

(2)对任意 $x\in(0,+\infty)$,$f(x)>\frac{1}{3}g(x)$恒成立,即 $x\ln x>\frac{1}{3}(-x^2-ax-4)$恒成立,

即$-a<3\ln x+x+\frac{4}{x}$在$(0,+\infty)$上恒成立, ······ 7 分

令 $h(x)=3\ln x+x+\frac{4}{x}$,则 $h'(x)=\frac{(x+4)(x-1)}{x}$, ······ 8 分

令 $h'(x)<0$,得 $0<x<1$,令 $h'(x)>0$,得 $x>1$,

所以 $h(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增. ······ 10 分

所以 $h(x)_{\min}=h(1)=5$,所以$-a<5$,即 $a>-5$,故 a 的取值范围为$(-5,+\infty)$. ······ 12 分

22. (1)解:函数 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$,$f'(x)=e^x+1-a$, ······ 1 分

①当 $1-a\geqslant0$,即 $a\leqslant1$ 时,$f'(x)>0$ 在 $\mathbf{R}$ 上恒成立,所以 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上单调递增; ······ 2 分

②当 $1-a<0$,即 $a>1$ 时,由 $f'(x)<0$ 得 $x<\ln(a-1)$;由 $f'(x)>0$ 得 $x>\ln(a-1)$;

所以 $f(x)$在$(-\infty,\ln(a-1))$上单调递减,在$(\ln(a-1),+\infty)$上单调递增. ······ 4 分

(2)证明:要证 $f(x)>\ln x+a+1$,即证 $e^x+(1-a)x>\ln x+a+1$,

即证 $e^x>\ln x+(a-1)x+a+1$,因为 $a\leqslant1$,$x>0$,所以$(a-1)x+a+1\leqslant a+1\leqslant2$,

所以只需证 $e^x>\ln x+2$. ······ 5 分

法一:令 $h(x)=e^x-\ln x$,则 $h'(x)=e^x-\frac{1}{x}$,显然 $h'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增, ······ 6 分

又 $h'\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{e}-2<0$,$h'(1)=e-1>0$,所以存在唯一实数 $x_0\in\left(\frac{1}{2},1\right)$,使得 $h'(x_0)=0$,即 $e^{x_0}=\frac{1}{x_0}$,

所以 $x_0=-\ln x_0$. ······ 8 分

所以在$(0,x_0)$上,$h'(x)<0$,在$(x_0,+\infty)$上,$h'(x)>0$,

所以 $h(x)$在$(0,x_0)$上单调递减,在$(x_0,+\infty)$上单调递增, ······ 10 分

所以 $h(x)\geqslant h(x_0)=e^{x_0}-\ln x_0=\frac{1}{x_0}+x_0>2$,所以 $e^x>\ln x+2$,

故当 $a\leqslant1$ 时,对任意 $x>0$,恒有 $f(x)>\ln x+a+1$. ······ 12 分

法二:$e^x>\ln x+2\Leftrightarrow(e^x-x)+(x-\ln x)>2$. ······ 6 分

令 $f_1(x)=e^x-x$,$x\geqslant0$,则 $f'_1(x)=e^x-1$.

所以 $f'_1(x)\geqslant e^0-1=0$,所以 $f_1(x)$在$[0,+\infty)$上为增函数.

所以当 $x>0$ 时,$f_1(x)>f_1(0)=1$,即 $e^x-x>1$. ① ······ 9 分

令 $f_2(x)=x-\ln x$,则 $f_2'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$.

当 $0<x<1$ 时,$f_2'(x)<0$;当 $x>1$ 时,$f_2'(x)>0$.

所以 $f_2(x)$在$(0,1)$上为减函数,在$(1,+\infty)$上为增函数.

所以当 $x>0$ 时,$f_2(x)\geqslant f_2(1)=1$,即 $x-\ln x\geqslant1$. ②

①②两式相加,得$(e^x-x)+(x-\ln x)>2$. 所以 $e^x>\ln x+2$,

故当 $a\leqslant1$ 时,对任意 $x>0$,恒有 $f(x)>\ln x+a+1$. ······ 12 分

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。

微信搜一搜

自主选拔在线