

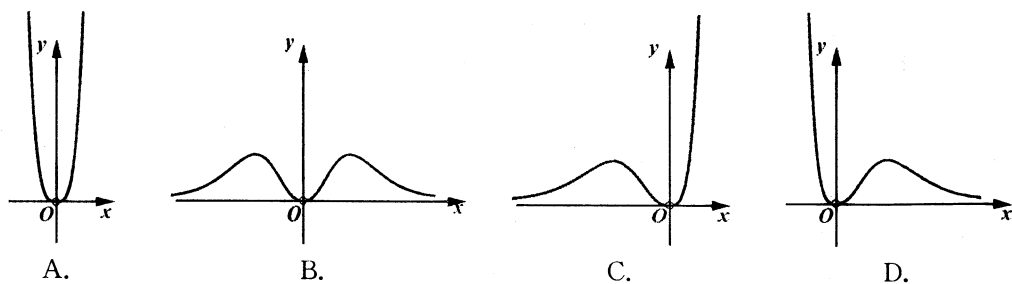
# 2019 年高中毕业年级第三次质量预测 理科数学试题卷

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 考试时间 120 分钟, 满分 150 分. 考生应首先阅读答题卡上的文字信息, 然后在答题卡上作答, 在试题卷上作答无效. 交卷时只交答题卡.

## 第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题(本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.)

- 已知集合  $A = \{x | \sqrt{x+1} < 2\}$ , 集合  $B = \{y | y = (\frac{1}{2})^x, x \in \mathbf{R}\}$ , 则集合  $A \cap B$  等于  
A.  $(-1, 3)$       B.  $[-1, 3)$       C.  $[0, 3)$       D.  $(0, 3)$
- 已知  $z = (1+i)(2-i)$ , 则  $|z|^2 =$   
A.  $2+i$       B.  $3+i$       C. 5      D. 10
- “ $0 < m < 2$ ”是“方程  $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{2-m} = 1$  表示椭圆”的  
A. 充要条件      B. 充分不必要条件  
C. 必要不充分条件      D. 既不充分也不必要条件
- 已知  $\cos(\frac{2019\pi}{2} + \alpha) = \frac{1}{2}$ ,  $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , 则  $\cos\alpha =$   
A.  $\frac{1}{2}$       B.  $-\frac{1}{2}$       C.  $-\frac{\sqrt{3}}{2}$       D.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- 我国著名数学家华罗庚先生曾说: 数缺形时少直观, 形缺数时难入微, 数形结合百般好, 隔裂分家万事休. 在数学的学习和研究中, 常用函数的图象来研究函数的性质, 也常用函数的解析式来琢磨函数的图象的特征. 如函数  $f(x) = \frac{x^4}{|4^x - 1|}$  的图象大致是



- 等比数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 若  $S_{2n} = 4(a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}) (n \in \mathbf{N}^+)$ ,  $a_1 a_2 a_3 = -27$ , 则  $a_5 =$   
A. 81      B. 24      C. -81      D. -24

7. 某同学 10 次测评成绩的数据如茎叶图所示, 总体的中位数为 12. 若要使该总体的标准差最小, 则  $4x+2y$  的值是

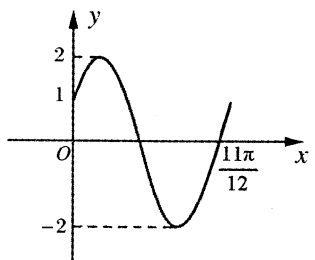
0	2	2	3	4
1	$\bar{x}$	$y$	9	9
2	0	1		

- A. 12      B. 14  
C. 16      D. 18

8. 关于圆周率, 数学发展史上出现过许多很有创意的求法, 如著名的蒲丰试验. 受其启发, 我们也可以通过设计下面的试验来估计  $\pi$  的值, 试验步骤如下: ①先请高二年级  $n$  名同学每人在小卡片上随机写下一个实数对  $(x, y) (0 < x < 1, 0 < y < 1)$ ; ②若卡片上的  $x, y$  能与 1 构成锐角三角形, 则将此卡片上交; ③统计上交的卡片数, 记为  $m$ ; ④根据统计数  $n, m$  估计  $\pi$  的值. 那么可以估计  $\pi$  的值约为

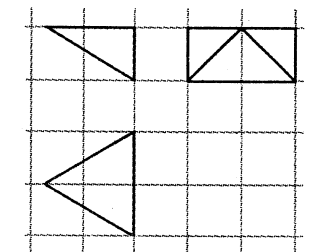
- A.  $\frac{m}{n}$       B.  $\frac{n-m}{n}$       C.  $\frac{4(n-m)}{n}$       D.  $\frac{4m}{n}$

9. 已知函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ , ( $A > 0, \omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的部分图象如图所示, 则使  $f(a+x) - f(a-x) = 0$  成立的  $a$  的最小正值为



- A.  $\frac{\pi}{12}$       B.  $\frac{\pi}{6}$   
C.  $\frac{\pi}{4}$       D.  $\frac{\pi}{3}$

10. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗实线画出的是某几何体的三视图, 已知其俯视图是正三角形, 则该几何体的外接球的体积是



- A.  $\frac{19\sqrt{57}\pi}{54}$       B.  $\frac{22\sqrt{66}\pi}{54}$   
C.  $\frac{19\pi}{3}$       D.  $\frac{22\pi}{3}$

11.  $F_1, F_2$  是双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$  的左右焦点, 若双曲线上存在点  $P$  满足  $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} = -a^2$ , 则双曲线离心率的取值范围为

- A.  $[\sqrt{3}, +\infty)$       B.  $[\sqrt{2}, +\infty)$       C.  $(1, \sqrt{3}]$       D.  $(1, \sqrt{2}]$

12. 设函数  $f(x)$  在  $\mathbf{R}$  上存在导函数  $f'(x)$ ,  $\forall x \in \mathbf{R}$ , 有  $f(x) - f(-x) = x^3$ , 在  $(0, +\infty)$  上有  $2f'(x) - 3x^2 > 0$ , 若  $f(m-2) - f(m) \geq -3m^2 + 6m - 4$ , 则实数  $m$  的取值范围为

- A.  $[-1, 1]$       B.  $(-\infty, 1]$       C.  $[1, +\infty)$       D.  $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

## 第 II 卷(非选择题 共 90 分)

本卷包括必考题和选考题两部分. 第 13-21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答, 第 22-23 题为选考题, 考生根据要求作答.

二、填空题(本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 把答案填在答题卡上.)

13. 已知向量  $a = (1, \lambda), b = (\lambda, 2)$ , 若  $(a+b) \parallel (a-b)$ , 则  $\lambda =$  \_\_\_\_\_.

14. 12 本相同的资料书分配给三个班级, 要求每班至少一本且至多六本, 则不同的分配方法共有 \_\_\_\_\_ 种.

15. 设函数  $h(x)$  的定义域为  $D$ , 若满足条件: 存在  $[m, n] \subseteq D$ , 使  $h(x)$  在  $[m, n]$  上的值域为  $[2m, 2n]$ , 则称  $h(x)$  为“倍胀函数”. 若函数  $f(x) = a^x (a > 1)$  为“倍胀函数”, 则实数  $a$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

16. 已知数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + 1$ , 若集合  $M = \{n | n(n+1) \geq t(a_n + 1), n \in \mathbb{N}^*\}$  中有 3 个元素, 则实数  $t$  的取值范围是 \_\_\_\_\_.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共 70 分. 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

(一) 必考题: 共 60 分

17. (本小题满分 12 分)

在  $\triangle ABC$  中,  $AB = 2\sqrt{3}, AC = \sqrt{3}$ ,  $AD$  为  $\triangle ABC$  的内角平分线,  $AD = 2$ .

(I) 求  $\frac{BD}{DC}$  的值;

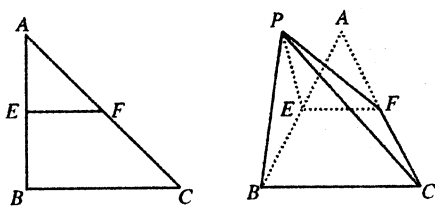
(II) 求角  $A$  的大小.

18. (本小题满分 12 分)

如图,  $\triangle ABC, AB = BC = 2, \angle ABC = 90^\circ$ ,  $E, F$  分别为  $AB, AC$  边的中点, 以  $EF$  为折痕把  $AEF$  折起, 使点  $A$  到达点  $P$  的位置, 且  $PB = BE$ .

(I) 证明:  $EF \perp$  平面  $PBE$ ;

(II) 设  $N$  为线段  $PF$  上动点, 求直线  $BN$  与平面  $PCF$  所成角的正弦值的最大值.



19. (本小题满分 12 分)

在我国, 大学生就业压力日益严峻, 伴随着政府政策引导与社会观念的转变, 大学生创业意识, 就业方向也悄然发生转变. 某大学生在国家提供的税收, 担保贷款等很多方面的政策扶持下选择加盟某专营店自主创业, 该专营店统计了近五年来创收利润数  $y_i$  (单位: 万元) 与时间  $t_i$  (单位: 年) 的数据, 列表如下:

$t_i$	1	2	3	4	5
$y_i$	2.4	2.7	4.1	6.4	7.9

(I) 依据表中给出的数据, 是否可用线性回归模型拟合  $y$  与  $t$  的关系, 请计算相关系数  $r$  并加以说明 (计算结果精确到 0.01). (若  $|r| > 0.75$ , 则线性相关程度很高, 可用线性回归模型拟合)

附: 相关系数公式  $r = \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{\sum_{i=1}^n t_i y_i - n\bar{t}\bar{y}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$

参考数据  $\sqrt{56.95} \approx 7.547$ .

(II) 该专营店为吸引顾客, 特推出两种促销方案.

方案一: 每满 500 元可减 50 元;

方案二: 每满 500 元可抽奖一次, 每次中奖的概率都为  $\frac{2}{5}$ , 中奖就可以获得 100 元现金

奖励, 假设顾客每次抽奖的结果相互独立.

① 某位顾客购买了 1050 元的产品, 该顾客选择参加两次抽奖, 求该顾客获得 100 元现金奖励的概率.

② 某位顾客购买了 1500 元的产品, 作为专营店老板, 是希望该顾客直接选择返回 150 元现金, 还是选择参加三次抽奖? 说明理由.

20. (本小题满分 12 分)

已知抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$ , 圆  $E: (x-3)^2 + y^2 = 1$ .

(I)  $F$  是抛物线  $C$  的焦点,  $A$  是抛物线  $C$  上的定点,  $\overrightarrow{AF} = (0, 2)$ , 求抛物线  $C$  的方程;

(II) 在 (I) 的条件下, 过点  $F$  的直线  $l$  与圆  $E$  相切, 设直线  $l$  交抛物线  $C$  于  $P, Q$  两点, 则在  $x$  轴上是否存在点  $M$  使  $\angle PMO = \angle QMO (O$  为坐标原点)? 若存在, 求出点  $M$  的坐标; 若不存在, 请说明理由.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数  $f(x) = \frac{e^x}{x} + a(x - \ln x), a \in \mathbb{R}$ .

(I) 当  $a = -e$  时, 求  $f(x)$  的最小值;

(II) 若  $f(x)$  有两个零点, 求参数  $a$  的取值范围.

(二) 选考题: 共 10 分. 请考生在第 22、23 题中任选一题作答. 如果多做, 则按所做的第一题计分.

22. (本小题满分 10 分) [选修 4-4: 坐标系与参数方程]

在平面直角坐标系  $xOy$  中, 直线  $l$  的参数方程为  $\begin{cases} x = -2 - t, \\ y = 1 + t \end{cases} (t \text{ 为参数})$ , 曲线  $C_1: y =$

$\sqrt{1-x^2}$ . 以坐标原点为极点,  $x$  轴正半轴为极轴建立极坐标系, 曲线  $C_2$  的极坐标方程为  $\rho =$

$4\sqrt{2} \sin(\alpha - \frac{\pi}{4})$ .

(I) 若直线  $l$  与  $x, y$  轴的交点分别为  $A, B$ , 点  $P$  在  $C_1$  上, 求  $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BP}$  的取值范围;

(II) 若直线  $l$  与  $C_2$  交于  $M, N$  两点, 点  $Q$  的直角坐标为  $(-2, 1)$ , 求  $||QM| - |QN||$  的值.

23. (本小题满分 10 分) [选修 4-5: 不等式选讲]

已知函数  $f(x) = |x+1| + a|x+2|$ .

(I) 求  $a = 1$  时,  $f(x) \leq 3$  的解集;

(II) 若  $f(x)$  有最小值, 求  $a$  的取值范围, 并写出相应的最小值.

自主招生在线创始于 2014 年，是专注于自主招生、学科竞赛、全国高考的升学服务平台，旗下拥有网站和微信两大媒体矩阵，关注用户超百万，用户群体涵盖全国 90% 以上的重点中学老师、家长和考生，引起众多重点高校的关注。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注自主招生在线官方微信号：**zizzsw**。



微信扫一扫，快速关注