

重庆南开中学高 2020-2021 学年第二学期高 2023 级期末考试

数学试题

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分, 满分 150 分, 考试时间 120 分钟

第 I 卷(选择题 共 60 分)

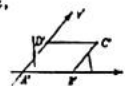
一、选择题: 本大题 8 个小题, 每小题 5 分, 共 40 分, 每小题只有一个选项符合要求, 答案请涂写在机读卡上.

1. 已知复数 z 满足 $(i-2)z=i+1$, 则 $z=(\quad)$

- A. $\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$ B. $-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$ C. $\frac{1}{5}-\frac{3}{5}i$ D. $\frac{1}{5}+\frac{3}{5}i$

2. 如图所示为一个平面图形采用斜二测画法得到的直观图, 其直观图是一个边长为 1 的菱形, 则该平面图形的面积为 (\quad)

- A. 2 B. 1 C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $2\sqrt{2}$

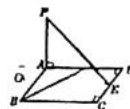


3. 已知非零向量 \vec{a}, \vec{b} 满足 $|\vec{b}|=2|\vec{a}|$, $(\vec{a}+2\vec{b}) \cdot (3\vec{a}-\vec{b})=0$, 则向量 \vec{a}, \vec{b} 的夹角为 (\quad)

- A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

4. 如图, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, 四边形 $ABCD$ 为矩形, 其中 $AD=2AB$, E 是 CD 的中点, F 是 AD 上一点, 当 $BF \perp PE$ 时, $AF:FD=(\quad)$

- A. 1:1 B. 1:2 C. 1:5 D. 1:7



5. 一个圆锥的侧面积是其底面面积的三倍, 则该圆锥的侧面展开图的圆心角为 (\quad)

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. π

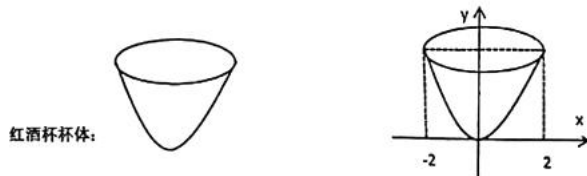
6. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 已知 $\angle B=60^\circ$, $\triangle ABC$ 的面积为 $3\sqrt{3}$, 且 $\sin A + \sin C = 2\sin B$, 则 b 的值为 (\quad)

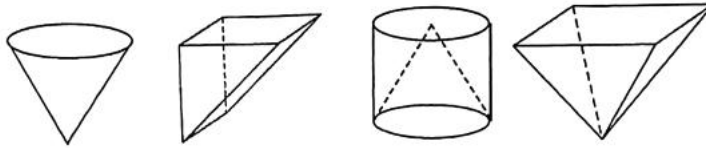
- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B. $\sqrt{3}$ C. $2\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{3}$

7. 已知 $\triangle ABC$, $AB=AC=3$, $BC=4$, 将它沿中线 AD 折起得四面体 $A-BCD$, 使得此时 $BC=2\sqrt{3}$, 则四面体 $A-BCD$ 的外接球表面积为 (\quad)

- A. 16π B. 18π C. 21π D. 36π

8. 我国南北朝时的数学家祖暅提出了计算体积的原理: “幂势既同, 则积不容异”, 意思是两个等高几何体, 如果作任意高度为 h 的水平截面截两个几何体所得截面面积相同, 则两个几何体体积相同. 如图是一个红酒杯的杯体部分, 它是由抛物线 $y=x^2$ 在 $x \in [-2, 2]$ 的部分曲线以 y 轴为轴旋转而成的旋转体, 其上口半径为 2, 高度为 4, 那么以下几个几何体做成的容器与该红酒杯的容积相同的是 (\quad)

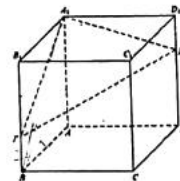
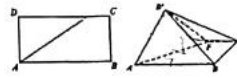




- 图一 图二 图三 图四
- A. 如图一是一个底面半径为 2, 高为 4 的圆锥
 B. 如图二是一个纵向放置的直三棱柱, 高为 π , 底面是一个两直角边均为 4 的直角三角形
 C. 如图三是一个底面半径为 2, 高为 4 的圆柱挖去了同底等高的圆锥
 D. 如图四是一个高为 4 的四棱锥, 底面是长宽分别为 π 和 4 的矩形

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 有选错的得 0 分, 部分选对的得 2 分。

9. 下列说法正确的是 ()
- A. 平面 $\alpha, \beta, \gamma, \alpha \cap \beta = m, \alpha \cap \gamma = n, \beta \cap \gamma = l$, 若 $m \parallel n$, 则 $n \parallel l$
 B. 对于平面 α 和直线 a, b , 若 $a \perp b, a \perp \alpha$, 则 $b \parallel \alpha$
 C. 两个相邻侧面均为矩形的棱柱为直棱柱
 D. 若正四棱锥所有棱长相等, 则侧棱与底面所成角为 45°
10. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 下列命题正确的是 ()
- A. 若 $A = 30^\circ, b = 4, a = 3$, 则 $\triangle ABC$ 有两解
 B. 若 $A = 60^\circ, a = 2$, 则 $\triangle ABC$ 的面积最大值为 $2\sqrt{3}$
 C. 若 $a = 4, b = 5, c = 6$, 则 $\triangle ABC$ 外接圆半径为 $\frac{8\sqrt{7}}{7}$
 D. 若 $ab > c^2$, 则 $0 < C < \frac{\pi}{3}$
11. 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 4, AD = 2, F$ 为线段 CD 上一点, 且满足 $DF = 3FC$, 现将 $\triangle DAF$ 沿 AF 折起使得 D 折到 D' , 使得平面 $ABD' \perp$ 平面 ABC , 则下列正确的是 ()
- A. 线段 BD' 上存在一点 P (异于端点), 使得直线 AD' 与 CP 垂直
 B. 线段 BD' 上存在一点 P (异于端点), 使得直线 $CP \parallel$ 面 $AD'F$
 C. 直线 $D'F$ 与面 ABC 成角正弦值为 $\frac{2\sqrt{5}}{9}$
 D. 面 $D'BC$ 与面 ABC 所成锐二面角正切值为 $\frac{\sqrt{5}}{4}$
12. 正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4, E, F 分别为棱 DD_1, BB_1 上的动点, 满足 $D_1E = BF$, 则以下命题正确的有 ()
- ∵ 三角形 A_1EF 的面积始终保持不变
 B. 三棱锥 C_1-A_1EF 的体积始终不变
 C. C_1 到面 A_1EF 的距离最大为 $\frac{4}{3}\sqrt{6}$
 D. 若 $\overline{EG} = 2\overline{GF}$, 则过 G 的平面截正方体外接球所得截面面积最小为 $\frac{32}{9}\pi$



第II卷(非选择题 共90分)

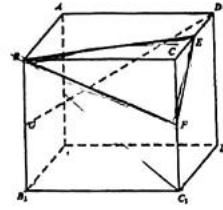
二、填空题：本大题4个小题，每小题5分，共20分。16题第一空2分，第二空3分。各题答案必须填写在答题卡上相应位置（只填结果，不写过程）。

13. 设复数 z 满足 $z = (3+2i)^2 - 7i$ ，则 z 的实部为_____。
14. 已知向量 $\vec{a} = (2, 3)$ ， $\vec{b} = (1, m)$ ，且 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 与 $\vec{a} - \vec{b}$ 平行，则 $m =$ _____。
15. 已知三棱台 $ABC - A_1B_1C_1$ 上下底面均为正三角形， $AB = 1$ ， $A_1B_1 = 2$ ，侧棱长 $AA_1 = BB_1 = CC_1$ ，若 $AA_1 \perp BC_1$ ，则此棱台的高为_____。
16. 棱长为2的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 内（包含表面和棱上）有一点 P ， M 、 N 分别为 A_1B_1 、 DD_1 中点，且 $\vec{AP} = \lambda \vec{AM} + \mu \vec{AN}$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$)。

- (1) 若 $\vec{D_1P} = t \vec{D_1C_1}$ ($t \in \mathbb{R}$)，则 $t =$ _____。
- (2) 若 $\vec{AP} = k \vec{A_1C_1}$ ($k \in \mathbb{R}$)，则三棱锥 $A - PD_1C_1$ 体积为_____。

三、解答题：本大题6个小题，共70分。各题解答必须答在答题卡上（必须写出必要的文字说明、演算步骤或推理过程）。

17. 如图，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， $AA_1 = 2$ ， E 、 F 、 G 分别为 CD 、 CC_1 、 BB_1 中点。
- (1) 求证： $DG \parallel$ 平面 BEF ；
- (2) 求异面直线 DG 与 EF 所成角的余弦值。



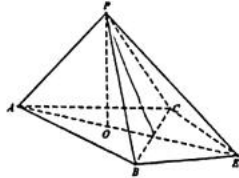
18. 如下图所示， $CA \perp AB$ ， $CA = 1$ ， $CB = 3$ ， $\vec{AD} = \lambda \vec{AB}$ ， $\vec{BE} = \lambda \vec{BC}$ 。

- (1) 若 D 为 AB 中点，求 $\vec{AE} \cdot \vec{CD}$ ；
- (2) 是否存在实数 λ ，使得 $\vec{AE} \perp \vec{CD}$ ？若存在，求出 λ 的值；若不存在，请说明理由。



19. 如图，正三棱锥 $P - ABC$ 中， PA 与底面 ABC 成角正切值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

- (1) 证明： $PA \perp$ 面 PBC ；
- (2) 设 O 为 $\triangle ABC$ 的中心，延长 AO 到点 E 使得 $\vec{AE} = 3\vec{AO}$ ，求二面角 $A - PC - E$ 的平面角的大小。

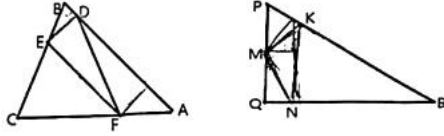


20. 重庆某公园有两块三角形草坪, 准备修建三角形道路 (不计道路宽度), 道路三角形的顶点分别在草坪三角形的三条边上.

(1) 第一块草坪的三条边 $AB=80$ 米, $AC=70$ 米, $BC=50$ 米, 若 $\overline{EF}=\frac{3}{4}\overline{AB}$, $ED\perp AB$ (如下左图),

$\triangle DEF$ 区域内种植郁金香, 求郁金香种植面积.

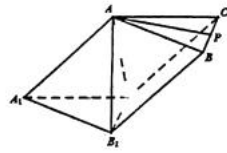
(2) 第二块草坪的三条边 $PQ=60$ 米, $QR=80$ 米, $PR=100$ 米, M 为 PQ 中点, $MN\perp MK$ (如下右图), $\triangle MNK$ 区域内种植紫罗兰, 求紫罗兰种植面积的最小值.



21. 已知三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$, $AB=AC=BC=2$, 侧面 BCC_1B_1 为矩形, 面 $ABC\perp$ 面 AB_1C_1

(1) 求证: $AB_1=AC_1$;

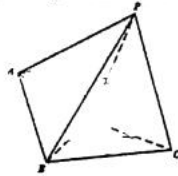
(2) 若二面角 $A_1-AB_1-C_1$ 的余弦值为 $\frac{\sqrt{5}}{5}$, P 为 BC 中点, 求 PB_1 与面 AA_1B_1 所成角的正弦值.



22. 已知四边形 $ABCD$ 中, $AB=AD=\sqrt{2}$, $BC=CD=\sqrt{5}$, $BD=2$, 沿 BD 折起使其成为大小为 θ ($90^\circ < \theta < 180^\circ$) 的二面角 $A-BD-C$. 空间中一点 P 满足 $PB=PD$.

(1) 求证: $AP\perp BD$;

(2) 若 $PA=PC=PB=PD$, (即 P 为四面体 $A-BCD$ 的外接球球心), 若要使得两个三棱锥 $P-ABD, P-BCD$ 拼成的多面体体积是四面体 $A-BCD$ 体积的 1.5 倍, 求 θ 的余弦值.



关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。



关注后获取更多资料:

回复“答题模板”，即可获取《高中九科试卷的解题技巧和答题模版》

回复“必背知识点”，即可获取《高考考前必背知识点》