2023届高三湖北十一校第一次联考数学试题

参考答案及评分细则

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	C	C	D	B	A	B	D	AD	ACD	ABD	ABC

1.B【解析】由题意得 $P=(-\infty,3)$，$Q=(0,8)$，所以 $P\cap Q=(0,3)$，故选B.

2.C【解析】设 $z=a+bi$，由题意得 $(a-1)^2+b^2=a^2+(b+1)^2=(a-5)^2+b^2$，解得 $a=3$，$b=-3$，故选C.

3.C【解析】$P(AB)=0$，$P(A)=P(B)=\dfrac{1}{18}$，$P(C)=1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^2=\dfrac{11}{36}$，故选C.

4.D【解析】易知 $\dfrac{EG}{AB}=\dfrac{3}{8}$，由三点共线定理得 $\overrightarrow{AG}=\dfrac{3}{11}\overrightarrow{AB}+\dfrac{8}{11}\overrightarrow{AE}=\dfrac{3}{11}\overrightarrow{AB}+\dfrac{6}{11}\overrightarrow{AD}$，故选D.

5.B【解析】ΔABC 外接圆直径为 $2r=\dfrac{3}{sin\dfrac{\pi}{6}}=6$，所以三棱锥的外接球半径为 $R=\sqrt{3^2+3^2}=3\sqrt{2}$，故选B.

6.A【解析】因为 $\omega x+\dfrac{\pi}{6}\in\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\omega}{3}\pi+\dfrac{\pi}{6}\right)$，恰好取到一次最大值与一次最小值可得 $\dfrac{3\pi}{2}<\dfrac{\omega\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}\le\dfrac{5\pi}{2}$，解得 $4<\omega\le 7$，故选A.

7.B【解析】由题意可令 $A=B=1$，所以将数列 $\{a_n\}$ 逐个列举可得：$a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=a_1+a_2=4$，$a_4=a_3+a_2=7$，$a_5=a_4+a_3=11$，所以 $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5+\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5=11$，因为 $\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5\in(-1,0)$，所以 $\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5\in(11,12)$，故 $\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5\right]=11$，故选B.

8.D【解析】构造函数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$，易得 $ae=f(ln2)$，$be=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$，$ce=f\left(\dfrac{4}{3}\right)$，$f'(x)=\dfrac{(x-1)}{x^2}e^x$，所以 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 递减，$(1,+\infty)$ 递增，易知 $1>\ln 2>\dfrac{1}{2}$，所以 $a<b$，$ae=\dfrac{2}{ln2}=\dfrac{4}{ln4}=f(ln4)$，因为 $1<\dfrac{4}{3}<\ln 4$，所以 $a>c$，所以 $b>a>c$，故选D.

9.AD【解析】平均数为 $\bar{x}=\dfrac{100\times5+100\times7}{200}=6$，故A正确，B错误；方差为 $s^2=\dfrac{100}{200}\left[9+(5-6)^2\right]+\dfrac{100}{200}\left[16+(7-6)^2\right]=13.5$，故D正确C错误，故选AD.

10.ACD【解析】由三垂线定理知A正确，B错误；几何法可知最小角为 $\dfrac{\pi}{6}$，C正确；$PC+PD=PC+PA_1\ge A_1C=2\sqrt{3}$，选项D正确.

11.ABD【解析】根据三次函数图像性质可知 AB 正确；$f'(x)=3x^2+2bx+1$，$x_1x_2=\dfrac{1}{3}$，$x_1^2+x_2^2>2x_1x_2=\dfrac{2}{3}$，

所以C错误；若$f(x)$单调，则$4b^2-12\le 0$得$-\sqrt{3}\le b\le\sqrt{3}$，选项$D$正确，故选$ABD$.

12.ABC【解析】过I_1分别作PF_1、PF_2、F_1F_2的垂线，垂足分别为D、E、F，所以$PF_1-PF_2=FF_1-FF_2=2a$，因为$FF_1+FF_2=2c$，所以$FF_1=a+c$，所以$x_{I_1}=a$，选项A正确；在$\Delta I_1I_2F_2$中，$\angle I_1F_2I_2=\frac{\pi}{2}$，由射影定理可得$I_1F\cdot I_2F=F_2F^2$，即$r_1r_2=(c-a)^2=a^2$，所以$c=2a$，故离心率为2，选项B正确；易得$\Delta ABF_1$内切圆半径为$r=\frac{2S}{l}$，其中$S=\frac{1}{2}\times 2c\times|y_1-y_2|=2a|y_1-y_2|$，$l=4a+2AB$，设$AB$直线方程为$x=my+2a$，$m\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，联立$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{3a^2}=1\\ x=my+2a\end{cases}$得$(3m^2-1)y^2+12may+9a^2=0$，$|y_1-y_2|=\frac{6a\sqrt{m^2+1}}{|3m^2-1|}$，代入可得

$$r=\frac{4a\frac{6a\sqrt{m^2+1}}{|3m^2-1|}}{4a+2*6a\frac{m^2+1}{|3m^2-1|}}=\frac{3a\sqrt{m^2+1}}{2}\ge\frac{3}{2}a$$，故C正确；由对称性不妨设$\angle I_1F_2F=\alpha$，直线AB的倾斜角为θ，

则 $2\alpha+\theta=\pi$，$\theta=\pi-2\alpha\in\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right]$，所以$\alpha\in\left[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$，$\tan\alpha\in\left[1,\sqrt{3}\right)$，$r_1=a\tan\alpha$，

$r_2=a\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\frac{a}{\tan\alpha}$，所以$r_1+r_2=a\left(\tan\alpha+\frac{1}{\tan\alpha}\right)\in\left[2a,\frac{4\sqrt{3}}{3}a\right)$，选项D错误.故选ABC.

13. -12【解析】利用展开式得$C_4^3\times(-3)^1=-12$.

14. $\frac{3}{2}n(n+1)$【解析】设$a_n=a_1+(n-1)d$，$3a_n=a_{3n}$可得$a_1=d$，由$(a_3-3)a_8=a_4^2$解得$d=3$，所以$S_n=\frac{3}{2}n(n+1)$.

15. $3x+3y-13=0$【解析】切点弦方程公式：$(4-1)(x-1)+(5-2)(y-2)=4$，化简得$3x+3y-13=0$.

16. $a\le\frac{e^2}{4}$或$a=\frac{e^3}{9}$【解析】$f'(x)=\frac{x-3}{x^4}e^x-a\frac{x-3}{x^2}=\frac{(x-3)}{x^2}\left(\frac{e^x}{x^2}-a\right)$，若3是极值点，则$a\le\frac{e^x}{x^2}$，因为$\left(\frac{e^x}{x^2}\right)'=\frac{x-2}{x^3}e^x$，所以$a\le\left(\frac{e^x}{x^2}\right)_{\min}=\frac{e^2}{4}$；若3不是极值点，则3是$\frac{e^x}{x^2}-a=0$的一个根，此时$a=\frac{e^3}{9}$.

17.【解析】【法一】(1) 通分化简可得$\sin(B-A)\sin C+\sin^2A=\sin A\sin C$，

$\sin(B-A)\sin(B+A)+\sin^2A=\sin A\sin C$，即$\sin^2B\cos^2A-\cos^2B\sin^2A+\sin^2A=\sin A\sin C$，

即$\sin^2B(1-\sin^2A)-(1-\sin^2B)\sin^2A+\sin^2A=\sin A\sin C$，

整理得$\sin^2B=\sin A\sin C$，即$b^2=ac$，所以a、b、c成等比数列；································5分

【法二】由题意得 $\frac{\sin B\cos A-\cos B\sin A}{\sin A}+\frac{\sin A}{\sin C}=1$，

所以 $\frac{b\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-a\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}{a}+\frac{a}{c}=1$，化简可得 $\frac{2(b^2-a^2)}{2ac}+\frac{a}{c}=1$，

通分可得 $b^2=ac$，所以所以 a、b、c 成等比数列；…………5 分

（2）由（1）可得 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-ac}{2ac}\ge\frac{2ac-ac}{2ac}=\frac{1}{2}$，所以 $B\le\frac{\pi}{3}$，

当且仅当 $a=c$ 即 ΔABC 为正三角形时等号成立，所以 B 的最大角为 $\frac{\pi}{3}$.……10 分（不写取等条件扣 1 分）

18.【解析】（1）当 $n=1$ 时可得 $a_1=S_1=1$，…………1 分

当 $n\ge2$ 时，由题意可得 $(S_n-S_{n-1})(S_n+S_{n-1})=n$，即 $S_n^2-S_{n-1}^2=n$，

所以 $S_n^2=(S_n^2-S_{n-1}^2)+\cdots+(S_2^2-S_1^2)+S_1^2=n+(n-1)+\cdots+1=\frac{n(n+1)}{2}$，即 $S_n=\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$，

经检验，当 $n=1$ 时符合，所以 $S_n=\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}$，$n\in N^*$；…………4 分

所以当 $n\ge2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$，

经检验，当 $n=1$ 时符合，所以 $a_n=\sqrt{\frac{n(n+1)}{2}}-\sqrt{\frac{n(n-1)}{2}}$，$n\in N^*$；…………6 分（不检验扣 1 分）

（2）由（1）可得 $\frac{1}{S_n^2}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$，所以

$\frac{1}{S_1^2}+\frac{1}{S_2^2}+\cdots+\frac{1}{S_n^2}=2\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)<2$，命题得证.…………12 分

19.【解析】（1）取 BP 中点 M，连接 AM、CM，易知 $AM\perp BP$ 且 $CM\perp BP$，因此 $BP\perp$ 平面 ACM，因为 $BP\subset$ 平面 ABP，所以平面 $ACM\perp$ 平面 ABP，因为平面 $ACM\cap$ 平面 $ABP=AM$，

所以直线 AC 在平面 ABP 的射影在直线 AM 上，所以 $\angle CAM=\frac{\pi}{4}$，…………1 分

因为 $AM=CM=\sqrt3$，余弦定理可得 $AC=\sqrt6$，因为 $AC^2=AM^2+CM^2$，所以 $AM\perp CM$，

因为 $CM\perp BP$，所以 $CM\perp$ 平面 $ABED$，因为 $PE\subset$ 平面 $ABED$，所以 $CM\perp PE$，…………3 分

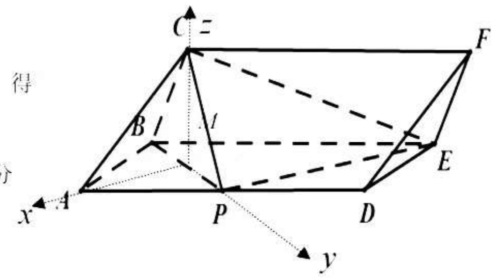
因为 $BP=2$，在 ΔPDE 中，$PD=ED=2$，$\angle PDE=\frac{2}{3}\pi$，所以 $PE=2\sqrt3$，又 $BE=4$，

所以 $BP^2+PE^2=BE^2$，即 $PE\perp BP$，…………5 分

所以 $EP\perp$ 平面 BCP；…………6 分

（2）由（1）可知 MP、MC、MA 两两垂直，以 M 为原点，MA 所在直线为 x 轴，MP 所在直线为 y 轴，MC

所在直线为z轴建立空间直角坐标系，所以$C(0,0,\sqrt{3})$，$P(0,1,0)$，$D(-\sqrt{3},2,0)$，$E(-2\sqrt{3},1,0)$，



设平面ECP的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{PE}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-y_1+\sqrt{3}z_1=0\\ -2\sqrt{3}x_1=0\end{cases}$，令$y_1=\sqrt{3}$得

$\overrightarrow{n_1}=(0,\sqrt{3},1)$，…………………………………8 分

设平面PCD的法向量为$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，

则$\begin{cases}\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{PC}=0\\ \overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{PD}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-y_2+\sqrt{3}z_2=0\\ y_2-\sqrt{3}x_2=0\end{cases}$，令$y_2=\sqrt{3}$得$\overrightarrow{n_2}=(1,\sqrt{3},1)$，…………………………………10 分

所以平面ECP与平面PCD夹角的余弦值为$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}||\overrightarrow{n_2}|}=\dfrac{4}{2\times\sqrt{5}}=\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$.………………12 分

20.【解析】（1）设A_i表示"第i次从乙箱中取到填空题"，$i=1$，2，

$$P(A_1)=\frac{3}{7}，P(A_2\mid A_1)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}，P(A_2\mid\overline{A_1})=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$ ……………………3 分

由全概率公式得：第2次抽到填空题的概率为：

$$P(A_2)=P(A_1)\times P(A_2\mid A_1)+P(\overline{A_1})\times P(A_2\mid\overline{A_1})=\frac{3}{7}\times\frac{2}{6}+\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}=\frac{3}{7}；$$ …………6 分

（2）设事件A为"第三支部从乙箱中抽1个选择题"，事件B_1为"第二支部从甲箱中取出2个题都是选择题"，事件B_2为"第二支部从甲箱中取出1个选择题1个填空题"，事件B_3为"第二支部从甲箱中取出2个题都是填空题"，则B_1、B_2、B_3彼此互斥，且$B_1\cup B_2\cup B_3=\Omega$，

$$P(B_1)=\frac{C_5^2}{C_8^2}=\frac{5}{14}，P(B_2)=\frac{C_5^1C_3^1}{C_8^2}=\frac{15}{28}，P(B_3)=\frac{C_3^2}{C_8^2}=\frac{3}{28}，$$

$$P(A\mid B_1)=\frac{6}{9}，P(A\mid B_2)=\frac{5}{9}，P(A\mid B_3)=\frac{4}{9}，$$ ……………………9 分

$$P(A)=P(B_1)\times P(A\mid B_1)+P(B_2)\times P(A\mid B_2)+P(B_3)\times P(A\mid B_3)=\frac{5}{14}\times\frac{6}{9}+\frac{15}{28}\times\frac{5}{9}+\frac{3}{28}\times\frac{4}{9}=\frac{7}{12}，$$ ……10 分

所求概率即是A发生的条件下B_1发生的概率：$P(B_1\mid A)=\dfrac{P(B_1A)}{P(A)}=\dfrac{P(B_1)P(A\mid B_1)}{P(A)}=\dfrac{\frac{5}{14}\times\frac{6}{9}}{\frac{7}{12}}=\dfrac{20}{49}$.…12 分

21.【解析】【法一】（1）将$(4,4)$带入抛物线方程$x^2=2py$得到$p=2$，所以抛物线方程为$x^2=4y$，……1 分

设切点坐标为(x_0,y_0)，则切线斜率为$\dfrac{x_0}{2}$，所以切线方程为$y-y_0=\dfrac{x_0}{2}(x-x_0)$，即$x_0x=2(y+y_0)$；……………………………………………………3 分

设$A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，AB直线方程为$y=kx+b$，由题意得$k_{PA}\cdot k_{PB}=\frac{x_1}{2}\cdot\frac{x_2}{2}=-2$，所以$x_1x_2=-8$，

联立直线AB和抛物线得$\begin{cases}x^2=4y\\y=kx+b\end{cases}$得$x^2-4kx-4b=0$，所以$x_1x_2=-4b=-8$得$b=2$，

所以AB的直线方程为$y=kx+2$，直线AB过定点$(0,2)$；…………6分

【法二】将$(4,4)$带入抛物线方程$x^2=2py$得到$p=2$，所以抛物线方程为$x^2=4y$，…………1分

设$P(x_0,\ y_0)$，过P的直线直线方程为$y-y_0=k(x-x_0)$，联立$\begin{cases}x^2=4y\\y-y_0=k(x-x_0)\end{cases}$

得$x^2-4kx-4(y_0-kx_0)=0$，

$\Delta=16k^2+16(y_0-kx_0)=0$得$k^2-x_0k+y_0=0$，由$k_1k_2=y_0=-2$，…………3分

切点横坐标为$x=2k$，所以$x_1x_2=4k_1k_2=-8$ …………4分

联立直线AB和抛物线得$\begin{cases}x^2=4y\\y=kx+b\end{cases}$得$x^2-4kx-4b=0$，所以$x_1x_2=-4b=-8$得$b=2$，

所以AB的直线方程为$y=kx+2$，直线AB过定点$(0,2)$；…………6分

（2）联立直线AB和抛物线得$\begin{cases}x^2=4y\\y=kx+2\end{cases}$得$x^2-4kx-8=0$ …… ①

可知$x_1+x_2=4k$，$x_1x_2=-8$，…………8分

设$C(x_1,-1)$，$D(x_2,-1)$设PA直线方程为：$x_1x=2(y_1+y)$，直线PB直线方程为：$x_2x=2(y_2+y)$，

联立$\begin{cases}x_1x=2(y_1+y)\\x_2x=2(y_2+y)\end{cases}$解得$\begin{cases}x=2k\\y=-2\end{cases}$，所以$P(2k,-2)$，所以$P$在直线$y=-2$上运动，…………10分

假设存在P点使得A、C、P、D四点共圆，则$\angle ACD=\angle APD=90^0$，所以$k_{PA}\cdot k_{PD}=-1$，

因为$k_{PA}=\frac{2}{x_1}$，$k_{PD}=\frac{1}{x_2-2k}$可得$\frac{2}{x_1(x_2-2k)}=-1$，解得$x_1=-\frac{3}{k}$，

代入①式可得$\frac{9}{k^2}+4=0$，该方程无实根，所以不存在P点使得A、C、P、D四点共圆.…………12分

22.【解析】（1）当$b=0$时，$f(x)=\frac{1}{2}x^2-a\cos x$，$f'(x)=x+a\sin x$，

因为$f(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上是单调递增函数，所以$f'(x)=x+a\sin x\geq 0$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上恒成立，

令$g(x)=x+a\sin x$，则$g'(x)=1+a\cos x$，

当$a\ge -1$时，$g(x)\ge x-sin x$，

令$p(x)=x-\sin x$，$p'(x)=1-\cos x\ge 0$，所以$p(x)$在$(0,+\infty)$上递增，

即$p(x)>p(0)=0$，所以$g'(x)>0$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$上恒成立，符合题意；…………………………3分

当$a<-1$时，$g'(0)=1+a<0$，$g'\left(\frac{\pi}{2}\right)=1>0$，且$g'(x)$在$\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$为单调递增函数，

所以存在唯一$x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$使得$g'(x_0)=0$，所以当$x\in(0,x_0)$时，$g'(x)<0$，$g(x)$在$(0,x_0)$递减，

即$\forall x\in(0,x_0)$，$g(x)<g(0)=0$，不符合题意；

综上所述$a\ge -1$；……………………………………………………6分

（2）$f'(x)=x+a\sin x+b\ln x$，当$a\in(0,1)$时，由（1）可知$x+a\sin x$是增函数，所以$b<0$，设$x_1<x_2$，

$x_1+a\sin x_1+b\ln x_1=x_2+a\sin x_2+b\ln x_2$，移项得$(x_2-x_1)+a(\sin x_2-\sin x_1)=(-b)(\ln x_2-\ln x_1)$，

由（1）知$x_2-sin x_2>x_1-sin x_1$，即$sin x_2-sin x_1<x_2-x_1$，

所以$(-b)(ln x_2-ln x_1)<(a+1)(x_2-x_1)$，即$(-b)ln\frac{x_2}{x_1}<(a+1)(x_2-x_1)$，……… ①

设$h(x)=\ln x-2\cdot\frac{x-1}{x+1}$，$h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}\ge 0$，

所以当$x>1$时，$h(x)>h(1)=0$，即$\ln x>2\cdot\frac{x-1}{x+1}$，所以$\ln\sqrt{x}>2\cdot\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$，即$\ln x>4\cdot\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$，

所以$\ln\frac{x_2}{x_1}>4\cdot\frac{\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}-1}{\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}+1}=4\cdot\frac{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}$，

带入①式中得到$4(-b)\frac{\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1}}<(a+1)(x_2-x_1)=(a+1)(\sqrt{x_2}-\sqrt{x_1})(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})$，

即$4\frac{-b}{a+1}<(\sqrt{x_2}+\sqrt{x_1})^2$，所以$\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}>2\sqrt{\frac{-b}{a+1}}$，命题得证.…………………12分（方法不唯一）

关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（**网址：www.zizzs.com**）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信号：**zizzsw**。