



7. 已知  $F_1, F_2$  分别是椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的左、右焦点,  $C$  过  $A(-2, 0)$  和  $B(0, 1)$  两点, 点  $P$  在线段  $AB$  上, 则  $\overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2}$  的取值范围为

- A.  $[-\frac{11}{5}, +\infty)$       B.  $[-\frac{11}{5}, 1]$       C.  $[-2, 1]$       D.  $[1, \frac{37}{5}]$

8. 已知函数  $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x}} (x > 0)$ , 数列  $\{a_n\}$  满足  $a_1 = 1, a_{n+1} = f(a_n)$ . 记数列  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和为  $S_n$ , 则

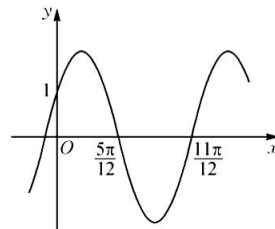
- A.  $\frac{3}{2} < S_{2022} < 3$       B.  $3 < S_{2022} < 4$       C.  $4 < S_{2022} < \frac{9}{2}$       D.  $\frac{9}{2} < S_{2022} < 5$

二、选择题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求。全部选对的得 5 分, 部分选对的得 2 分, 有选错的得 0 分。

9. 已知双曲线  $C: \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ ,  $F$  为  $C$  的下焦点,  $O$  为坐标原点,  $l_1$  是  $C$  的斜率大于 0 的渐近线, 过  $F$  作斜率为  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  的直线  $l$  交  $l_1$  于点  $A$ , 交  $x$  正半轴于点  $B$ , 若  $|OA| = |OB|$ , 则

- A.  $C$  的离心率为 2      B.  $C$  的离心率为  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$   
C.  $F$  到  $l_1$  距离为  $a$       D.  $F$  到  $l_1$  距离为  $b$

10. 函数  $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$  的部分图象如图所示,



将  $f(x)$  的图象向左平移  $\frac{\pi}{6}$  个单位长度得函数  $g(x)$  的图象, 则

- A.  $\omega = 2$   
B.  $g(x)$  的图象关于点  $(-\pi, 0)$  对称  
C.  $g(x)$  在  $(\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6})$  上单调递增  
D.  $g(x)$  在  $(0, \pi)$  上有两个极值点
11. 已知定义在  $(0, +\infty)$  上的函数  $f(x)$  满足: ①  $\forall x > 0, f(x) < 0$ ; ② 对任意正数  $a, b$ , 当  $a < b$  时,  $bf(a) > af(b)$  恒成立, 则
- A.  $f(\log_2 3) \log_3 2 > f(\log_3 4) \log_4 3$       B.  $2f(\frac{1}{2}) < 3f(\frac{1}{3})$   
C.  $\frac{\ln 2}{2} f(\frac{\ln 2}{2}) > \frac{\ln 3}{3} f(\frac{\ln 3}{3})$       D.  $\frac{\ln 2}{2} f(\frac{\ln 2}{2}) < \frac{\ln 3}{3} f(\frac{\ln 3}{3})$

12. 将曲线  $C_1: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 (x \leq 0)$  和曲线  $C_2: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 (x > 0)$  合成曲线  $E$ . 斜率为  $k$  的直线  $l$  与  $E$  交于

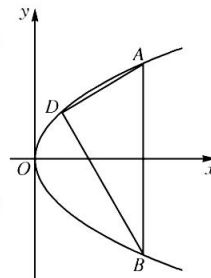
- A, B 两点,  $P$  为线段  $AB$  的中点, 则
- A. 曲线  $E$  所围成图形的面积小于 36      B. 曲线  $E$  与其对称轴仅有两个交点  
C. 存在  $k$ , 使得点  $P$  的轨迹总在某个椭圆上      D. 存在  $k$ , 使得点  $P$  的轨迹总在某条直线上

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分。

13. 已知  $f(x) = \sin 2x + \tan x + 1$ , 则曲线  $y = f(x)$  在点  $(\frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4}))$  处的切线方程为 \_\_\_\_\_, 更多试题与答案, 关注微信公众号: 三晋高中指南

14. 直线  $l$  过点  $(2, 1)$  且与圆  $C: (x+1)^2 + y^2 = 9$  相切, 则直线  $l$  的方程为 \_\_\_\_\_.

15. 如图, 直线  $x = t$  与抛物线  $C: y^2 = 2px (p > 0)$  交于  $A, B$  两点,  $D$  为  $C$  上异于  $A, B$  的一点, 若  $AD \perp BD$ , 则点  $D$  到直线  $x = t$  的距离与  $p$  的比值为 \_\_\_\_\_.



16. 若  $x_1, x_2$  是函数  $f(x) = \frac{1}{2}ax^2 - e^x + 1$  ( $a \in \mathbf{R}$ ) 的两个极值点, 且  $\frac{x_2}{x_1} \geq 2$ , 则实数  $a$  的取值范围为 \_\_\_\_\_.

四、解答题: 共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (本小题满分 10 分)

在  $\triangle ABC$  中, 角  $A, B, C$  的对边分别为  $a, b, c$ , 且  $a \sin A - c \sin C = (b - c) \sin B$ .

(1) 求  $A$  的大小;

(2) 若  $\triangle ABC$  为锐角三角形, 求  $\frac{b}{c}$  的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

已知  $F$  为双曲线  $E: \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$  的左焦点,  $P$  为直线  $x = 1$  上一动点,  $Q$  为线段  $PF$  与  $E$  的交点, 设

$$\frac{|FP|}{|FQ|} = t (t > 0).$$

(1) 若点  $P$  的纵坐标为  $s$ , 求  $s^2$  与  $t$  间满足的函数关系式;

(2) 证明: 存在常数  $m, n$ , 使得  $\frac{|FP|}{|FQ|} = m|PF| + n$ .

19. (本小题满分 12 分)

在正项数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1, \forall n \geq 2, a_1 + \frac{a_2}{3} + \dots + \frac{a_{n-1}}{2n-3} = \frac{a_n - 1}{2}$ .

(1) 求  $\{a_n\}$  的通项公式;

(2) 若数列  $\{b_n\}$  满足  $b_1 = a_1, b_2 = a_2 - 1$ , 且  $\ln b_n + \ln b_{n+2} = 2 \ln b_{n+1}$ , 设数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和为  $T_n$ , 证明:  $T_n \cdot T_{n+2} < T_{n+1}^2$ .

20. (本小题满分 12 分)

已知直线  $l_1: x-ay+2=0, l_2: ax+y-2a=0(a \in \mathbf{R})$ , 若  $l_1$  与  $l_2$  的交点  $P$  的轨迹为曲线  $C$ .

(1) 求曲线  $C$  的方程; 更多试题与答案, 关注微信公众号: 三晋高中指南

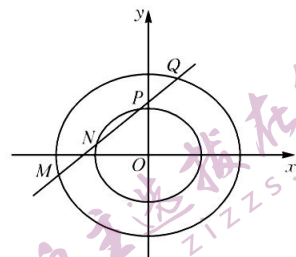
(2) 若圆  $E: x^2+y^2-2mx-2ny=0$  的圆心在直线  $y=\sqrt{3}x$  上, 且与曲线  $C$  相交所得公共弦  $MN$  的长为  $2\sqrt{3}$ , 求  $m, n$  的值.

21. (本小题满分 12 分)

已知椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  的一个焦点为  $F_1(-1, 0)$ , 其左顶点为  $A$ , 上顶点为  $B$ , 且  $F_1$  到直线  $AB$  的距离为  $\frac{\sqrt{7}}{7} |OB|$  ( $O$  为坐标原点).

(1) 求  $C$  的方程;

(2) 若椭圆  $E: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \lambda (\lambda > 0$  且  $\lambda \neq 1)$ , 则称椭圆  $E$  为椭圆  $C$  的  $\lambda$  倍相似椭圆. 已知椭圆  $E$  是椭圆  $C$  的 3 倍相似椭圆, 直线  $l: y=kx+m$  与椭圆  $C, E$  交于四点 (依次为  $M, N, P, Q$ , 如图), 且  $\vec{MQ} + \vec{PQ} = 2\vec{NQ}$ , 证明: 点  $T(k, m)$  在定曲线上.



22. (本小题满分 12 分)

已知  $f(x) = x^2 + x + a \ln x (a \in \mathbf{R})$ .

(1) 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 若  $a = 1$ , 函数  $g(x) = x + 1 - f(x), \forall x_1, x_2 \in (0, +\infty), x_1 \neq x_2, |x_1 g(x_2) - x_2 g(x_1)| > \lambda |x_1 - x_2|$  恒成立, 求实数  $\lambda$  的取值范围.

## 关于我们

自主选拔在线是致力于提供新高考生涯规划、强基计划、综合评价、三位一体、学科竞赛等政策资讯的升学服务平台。总部坐落于北京，旗下拥有网站（[网址: www.zizzs.com](http://www.zizzs.com)）和微信公众平台等媒体矩阵，用户群体涵盖全国90%以上的重点中学师生及家长，在全国新高考、自主选拔领域首屈一指。

如需第一时间获取相关资讯及备考指南，请关注**自主选拔在线**官方微信信号：**zizzsw**。



微信搜一搜

自主选拔在线